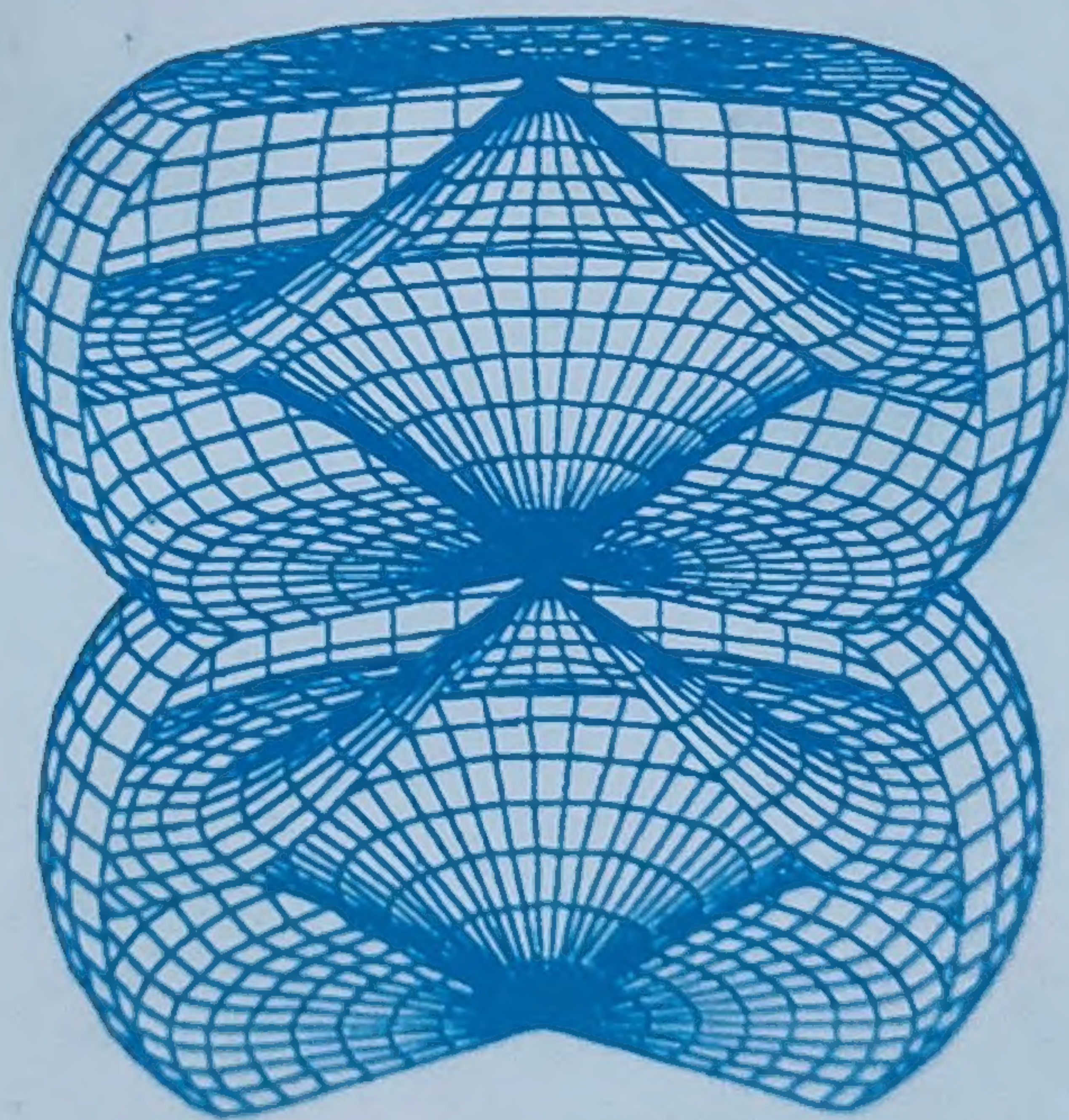


*C. DARIESCU    M. A. DARIESCU*

GRAVITATIE SI CAMPURI  
IN  
UNIVERSUL EINSTEIN





**GRAVITATIE SI CAMPURI**

**IN**

**UNIVERSUL EINSTEIN**



**Conf. dr. Ciprian DARIESCU**  
**Conf. dr. Marina-Aura DARIESCU**

**Catedra de Fizica Teoretica**  
**Facultatea de Fizica**  
**Universitatea *Al. I. Cuza* Iasi**

**GRAVITATIE SI CAMPURI**  
**IN**  
**UNIVERSUL EINSTEIN**



**EDITURA VESPER**  
**1997**



## Cuvânt Înainte

Participând în vara aceasta la *The Eighth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, organizată în Jerusalem, la Hebrew University, am avut ocazia să audiem (printre altele) o foarte interesantă și nu mai puțin "mișcătoare" prelegere ținută de renumitul fizician Yuval Ne'eman, laureat al Premiului Nobel, asupra a ceea ce domnia sa numea "norii negri ai fizicii contemporane". În esență, cele mai importante concluzii au fost următoarele:

- (i) Ritmul dezvoltărilor fundamentale în matematică și în fizica teoretică a fost mult mai intens la sfârșitul secolului XIX și prima jumătate a secolului XX decât este acum, la sfârșit de mileniu. Practic, cea care a avansat enorm, mai ales în ultimile decenii, a fost doar *tehnologia* ...
- (ii) Dacă este să judecăm cinstit, independent de interesele și investițiile financiare avute și respectiv făcute în domeniul fizicii teoretice, vom constata că cele mai multe dintre așa zisele cunoștințe fundamentale asupra realității și naturii Universului în care trăim provin din Mecanica Cuantică și Teoria Relativității Generale, ambele inițiate și apoi puternic dezvoltate în primele decenii ale secolului nostru. În comparație cu caracterul profund gnoseologic, amplu confirmat experimental, al acestora, nimic spectaculos, cu cel puțin aceeași durată de viață, impact și aplicabilitate științifică, nu a apărut în perioadele mai recente. Fără a atenta la renumele, cunoștințele și forța spirituală de investigație științifică a nici unuia dintre fizicienii contemporani, Ne'eman subliniază doar că cele mai multe dintre descoperirile ultimilor decenii pot fi explicate în termenii fizicii cuantice, teoriei einsteiniene a gravitației și teoriilor gauge.
- (iii) *De ce sunt negri norii fizicii contemporane ?*  
Fiindcă, nici unul dintre modelele și nici una dintre teoriile formulate în a doua jumătate a secolului nostru nu a primit o confirmare experimentală deplină. "Să ne înțelegem", cum spunea eminentul om de știință, "este vorba de fundament, de ceva pe care să ne



putem cu adevărat baza de acum încolo și nu doar de umplerea unor goluri ...” Astfel, fără a menționa chiar toate teoriile, nici ecuațiile Einstein și nici ecuațiile cromodinamicii cuantice nu au fost încă integrate complet și deci, încă nu știm ce sunt, în esență lor, gravitația și forțele tari. Deasemenea, vestitul Model Standard, al câmpurilor materiale și interacțiunilor din natură, conține aproape 20 de parametri introduși pur și simplu pentru ca teoria să confirme toate rezultatele experimentale din fizica particulelor elementare și a energiilor înalte. Este desigur un succes că, având nevoie, ca date de intrare, de numai acest set de parametri, putem explica, evalua și mai ales anticipa, aproape toate procesele din microcosmos, dar despre *originea* și *cauza* valorilor acestora nu știm practic nimic. Nici una dintre teoriile GUT (de unificare largă), prin care se încearcă reducerea numărului de parametri din Modelul Standard, nu este liberă de probleme majore, iar încercarea de soluționare a acestora, în cadrul aceluiași tip de teorii, nu face decât să tot mărească numărul de câmpuri suplimentare, de higgsoni și de multipleți, încât, până la urmă, teoria devine mult prea complicată pentru a mai fi aplicată, pierzându-și toată “suplețea” inițială. În domeniul teoriilor integrale de evoluție a Universului, situația este oarecum ambiguă. Dacă în urma prelucrării datelor experimentale ale celui mai sofisticat program de explorare la scară foarte largă a Metagalaxiei, experimentul C O B E, este practic sigur că Natura a preferat un “scenariu inflaționist”, în primele momente planckiene ale nașterii ei, nu cunoaștem încă modul exact de dezvoltare a “inflației spațio-temporale”. Această lacună conduce, printre altele, la incertitudini în estimarea teoretică a amplitudinii violării parității combinate, adică a ratei materie/antimaterie în Univers, a numărului de higgsoni și a masei acestora, a existenței și naturii bosonului “lepto-quark” X și, într-o perspectivă mai largă, *chiar a posibilelor căi de evoluție (viitoare) a prezentului Univers observabil.*

- (iv) Totuși, ar fi absurd și total neconstructiv să păstrăm o linie negativistă până la capăt. Fizica, în ansamblul ei, pătrunde în secolul



XXI cu un bagaj de cunoștințe enorm, cu date experimentale și observaționale foarte bine puse la punct și cu teorii atât de avansate, încât scânteia ce va aprinde *Noua Revoluție* va fi cu adevărat spectaculoasă. În același timp, chiar și din greșeli se pot învăța o mulțime de lucruri; cel puțin știm, în urma unui conjugat efort științific internațional "de ce nu merg" teoriile actuale, le cunoaștem punctele sensibile și există "câteva idei" (deloc vagi, doar insuficient fundamentate) de remediere a deficiențelor. Astfel, la confluența geometriei cu fizica, a apărut un subiect nou de investigație, extrem de promițător, reprezentat de așa numita "Teorie a 4-varietăților". Primele aplicații ale sale nu s-au lăsat mult așteptate: toate cele cinci tipuri de superstringuri, singurele posibile (după cum se poate demonstra), pot fi unificate într-o teorie "mai largă", de dată foarte recentă (196 - 197), numită "Teoria M" (de la "membranes") cu care vom păși, cu siguranță, în mileniul III. Potențialul științific al acesteia este încă nebănuț, ea conținând (cum spuneam) toate tipurile de teorii superstring și, dacă se va dovedi "liberă de singularități", vom avea, probabil, cea mai mare șansă și cele mai îndreptățite speranțe de desăvârșire a visului lui Einstein, al *Marii Teorii Unitare*.

Până atunci, parafrazând ușor mesajul laureatului Nobel, "să lăsăm Geniile să lucreze, iar noi, oamenii obișnuiți, să clădim numai pe temelile solide ale muncii lor ..."

Aceasta este și intenția noastră în prezenta lucrare pe care, cu modestie, o supunem atenției cititorului.

În încheiere, dar nicidecum la urmă pe firul simțirii noastre, dorim să aducem cele mai calde mulțumiri profesorilor noștri, părinților și mai ales, sub aspectul colaborării științifice, domnilor Prof. Dr. Gheorghe Zet, Prof. Dr. Ioan Gottlieb, Acad. Prof. Dr. Doc. Radu Miron și Conf. Dr. Gheorghe Maftai pentru adevăratul sprijin "de suflet" pe care ni l-au acordat, în căutările și în formarea noastră, fără de care această carte nu ar fi văzut lumina tiparului.

Iași, 6 August 1997

Ciprian și Marina-Aura Dariescu



# **CUPRINS GENERAL**

## **CAPITOLUL II**

3 - 59

MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA  $S^3 \times R$

## **CAPITOLUL 2**

63 - 85

GEOMETRODINAMICA  $S^3 \times R$  A CAMPULUI SCALAR

COMPLEX

## **CAPITOLUL 3**

89 - 116

FERMIONI PE  $S^3 \times R$

## **CAPITOLUL 4**

119 - 157

CAMPUL ELECTROMAGNETIC

## **CAPITOLUL 5**

161 - 196

EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA  $S^3 \times R$  A

MODELULUI WEINBERG - SALAM

## **BIBLIOGRAFIE**

197 - 201



# Cuprins

<b>1</b>	<b>MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA <math>S^3 \times R</math></b>	<b>3</b>
1.1	Aparatul matematic . . . . .	3
1.1.1	Grupuri și algebre Lie . . . . .	3
1.1.2	Elemente de geometrie diferențială . . . . .	8
1.2	Universul Einstein . . . . .	24
1.3	Geometrie $S^3 \times R$ . . . . .	51
1.4	Cosmologii Robertson - Walker . . . . .	55



# Capitolul 1

## MODELE COSMOLOGICE CU SPATIU BAZA $S^3 \times R$

### 1.1 Aparatul matematic

Dezvoltarea unor teorii gauge pe o varietate spațio - temporală cu timp ortogonal și hipersuprafețe de gen spațial compacte  $\Sigma^3 \times R$ , în particular  $S^3 \times R$ , impune prezentarea succintă a unor noțiuni de grupuri și algebre Lie [1], precum și a unor elemente de geometrie diferențială cum ar fi: fibratul principal și fibratul tangent, conexiunea liniară, tensorul de curbură, ecuațiile de structură Cartan, conexiunea Levi - Civita etc. [2-5].

#### 1.1.1 Grupuri și algebre Lie

Fie  $(G, *)$  un grup continuu, sau un grup Lie, unde



- $G$  este o varietate diferențiabilă și
- $G$  este un grup cu operația de compunere  $*$ , care este o aplicație diferențiabilă a lui  $G \times G$  în  $G$ .

Vom nota coordonatele elementului  $a \in G$  prin  $a^\alpha$ , unde indicele  $\alpha$  ia valori discrete. Coordonatele elementelor grupului formează varietatea grupului. Funcționalele  $(a * b)^\alpha$  sunt diferențiabile în raport cu  $a^\beta$  și  $b^\gamma$ ,  $\forall a, b \in G$ .

Introducem acum

- translația la stânga a lui  $G$ , prin elementul  $a$

$$\begin{aligned} L_a &: G \rightarrow G \\ L_a(x) &= a * x, \forall x \in G \end{aligned} \quad (1.1)$$

- translația la dreapta a lui  $G$ , prin elementul  $a$

$$\begin{aligned} R_a &: G \rightarrow G \\ R_a(x) &= x * a, \forall x \in G \end{aligned} \quad (1.2)$$

- conjugarea, prin elementul  $a$ , ca un automorfism intern al lui  $G$

$$\begin{aligned} C_a &: G \rightarrow G \\ C_a(x) &= a * x * a^{-1}, \forall x \in G \end{aligned} \quad (1.3)$$

### Observații

1. Un vector  $X$  definit pe  $G$  se numește stâng (drept) invariant dacă el este invariant la toate translațiile  $L_a$  ( $R_a$ ),  $a \in G$ , adică  $L_a(X) = X$  (respectiv  $R_a(X) = X$ ). Un vector stâng (drept) invariant este diferențiabil.



2. Sferele  $S^n$  nu sunt grupuri Lie, cu excepția lui  $n = 1$  și  $n = 3$ . În cazul nostru, sfera  $S^3$  este grup Lie.
3. Orice grup Lie este o varietate paralelizabilă. Reciproca nu este adevărată.

Definim algebra Lie  $\mathcal{G}$  a grupului Lie  $G$  ca fiind mulțimea tuturor vectorilor stâng invariante pe  $G$ , prin  $(\mathcal{G}, [\cdot, \cdot])$ , unde

- $\mathcal{G}$  este un spațiu liniar ,
- $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$   
 $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$  cu proprietățile:

- $[\cdot, \cdot]$  este liniar în ambele argumente,
- $[\cdot, \cdot]$  este antisimetric, adică

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

- $[\cdot, \cdot]$  satisface identitatea Jacobi

$$\sum_{\text{cicl}(X,Y,Z)} [X, [Y, Z]] = 0$$

$\mathcal{G}$  este izomorf cu spațiul tangent  $T_e(G)$  în elementul unitate,  $e$ , al grupului  $G$ .  $\mathcal{G}$  este o subalgebră Lie, de dimensiune  $n$  ( $n = \dim G$ ) a algebrei Lie a vectorilor  $\mathcal{X}(G)$ .

Fie  $\{X_i\}_{i=1, \overline{n}}$  baza algebrei Lie

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad (1.4)$$

unde constantele de structură  $C_{ij}^k$  au următoarele proprietăți :



- $C$  este un tensor de tip  $(1,2)$
- $C$  este antisimetric în indicii de jos

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad \forall i, j, k = \overline{1, n} \quad (1.5)$$

- identitatea lui Jacobi

$$\sum_{\text{cicl}(i,j,k)} = C_{im}^s C_{jk}^m = 0 \quad (1.6)$$

Definim aplicația exponențială

$$a(t) = \exp(tX), \quad \forall t \quad (1.7)$$

Coordonatele  $a^\alpha(t)$  definesc o curbă pe varietatea grupului, tangentă la vectorul  $(X^\alpha)$  în  $t = 0$ . Mulțimea punctelor acestei curbe, pentru un  $X$  dat, formează un subgrup abelian, uniparametric.  $a(t)$  este o curbă unică în  $G$ , asociată lui  $X$ . Acțiunea grupului  $G$  la dreapta, definită prin (1.2), determină atribuirea unui câmp vectorial  $X^*$ , indus prin aplicația exponențială (1.7), fiecărui element  $X \in \mathcal{G}$ .

În continuare, să introducem noțiunea de reprezentare.

Fie  $G$  un grup Lie de dimensiune  $n$  și  $\mathcal{G}$  algebra Lie asociată,  $\dim G = \dim \mathcal{G} = n$ . Definim grupul matricilor

$$GL(n, R) = \{A \in M(n, R) \mid \det A \neq 0\} \quad (1.8)$$

Algebra corespunzătoare acestui grup va fi notată prin  $gl(n, R)$ .

O reprezentare a grupului Lie,  $G$ , este o aplicație

$$\varphi : G \rightarrow GL$$



iar o reprezentare a algebrei Lie,  $\mathcal{G}$ , este aplicația

$$\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}l$$

Practic, elementele grupului  $GL(n, R)$  pot fi privite ca transformări ale unui set de variabile reale  $f^i$

$$f'^i = A_j^i(a) f^j \quad (1.9)$$

cu proprietățile:

$$\begin{aligned} a) \quad A_j^i(c) &= \delta_j^i \\ b) \quad A(a * b) &= A(a) \cdot A(b) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Considerăm variabilele  $f^i$  ca fiind coordonatele unor puncte care formează o varietate diferențiabilă. Această varietate poate fi dotată cu o metrică naturală, denumită metrică invariantă, cerând ca aceasta să fie invariantă la transformările determinate de generatorul infinitesimal. Pentru grupul  $G$  se construiește reprezentarea adjunctă, prin  $(ad a)x = C_a(x)$  dat de (1.3). În ceea ce privește algebra Lie,  $\mathcal{G}$ , reprezentarea adjunctă corespunzătoare se introduce prin

$$\begin{aligned} Ad : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}l \\ Ad_X(Y) &= [X, Y] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Enunțăm următoarea proprietate (fără demonstrație).

$$c^{Ad(X)} = ad c^X, \quad \forall X \in \mathcal{G} \quad (1.12)$$

Deoarece vom lucra cu grupuri Lie semisimple, vom introduce un criteriu de caracterizare a acestora. Un grup Lie este semisimplu, dacă și numai dacă algebra sa  $\mathcal{G}$  este semisimplă.



Fie  $\{X_i\}_{i=1, \overline{n}}$  baza algebrei  $\mathcal{G}$ . Construim forma Killing

$$B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow R$$

prin

$$B(X_i, X_j) = B_{ij} = C_{ik}^l C_{jl}^k \quad (1.13)$$

Dacă  $\det B_{ij} \neq 0$ , atunci  $\mathcal{G}$  este semisimplă.

### Exemplul 1

Considerăm grupul Lie cu trei parametri:

$$SO(3, R) = \{A \in GL(3, R) \mid A^T \cdot A = I_3, \det A = 1\} \quad (1.14)$$

Algebra Lie corespunzătoare este

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3 \\ [X_2, X_3] &= X_1 \\ [X_3, X_1] &= X_2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Forma Killing

$$B_{ij} = -2\delta_{ij} \quad (1.16)$$

arată că grupul  $SO(3, R)$  este semisimplu.

### 1.1.2 Elemente de geometrie diferențială

În cele ce urmează, vom prezenta, foarte succint, noțiunile de fibrat, fibrat principal și fibrat vectorial [5].

**Definiția 1.1** Se numește spațiu fibrat diferențiabil local trivial un cinciuplu  $(E, \pi, M, F, G)$  în care  $M$  este o varietate diferențiabilă,  $\pi : E \rightarrow M$  este o surjecție și sunt verificate condițiile:



- a)  $M$  poate fi acoperită cu o familie de deschiși  $U, V, W, \dots$  astfel că pentru orice deschis  $U$  din familie există o bijecție  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  și  $\pi(\varphi_U^{-1}(x, y)) = x, x \in U, y \in F$ .
- b) Dacă  $x \in U \cap V$  și  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \varphi_V : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ , atunci  $\varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1} : F \rightarrow F$  este egal cu  $L_g, g \in G$ . Prin  $\varphi_{U,x}$  s-a notat restricția bijecției  $\varphi_U$  la  $\pi^{-1}(x)$ . Vom identifica  $\varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1}$  cu elementul  $g$  din  $G$ .
- c) Aplicația  $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G$ , dată de  $g_{UV}(x) = \varphi_{V,x} \circ \varphi_{U,x}^{-1}$  este diferențiabilă.

Pentru spațiul fibrat  $(E, \pi, M, F, G)$  se dau denumirile:

- $E$  este spațiul total,
- $M$  este spațiul bază,
- $\pi$  este proiecția lui  $E$  pe  $M$ ,
- $F$  este fibra tip,
- grupul Lie,  $G$ , este grupul structural.

**Definiția 1.2** Spațiul fibrat  $(E, \pi, M, F, G)$  se numește fibrat principal dacă fibra tip  $F$  coincide cu grupul structural  $G$  și acțiunea lui  $G$  pe  $G$  este dată de translația la stânga  $L_g(a) = g * a, g, a \in G$ .

În cele ce urmează, vom nota fibratul principal cu  $\mathcal{P}(M, G)$ , sau simplu cu  $\mathcal{P}$ .



Pentru fiecare  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  este o subvarietate închisă a lui  $\mathcal{P}$ , numită fibra pe  $x$ . Prin acțiunea la dreapta a grupului  $G$  asupra punctului  $u$  din  $\mathcal{P}$ ,

$$\pi^{-1}(x) : R_a(u) = u * a, \quad a \in G$$

se va obține un set de puncte care alcătuiesc fibra prin  $u$ . Fiecare fibră este difeomorfă cu grupul  $G$ .

Fibratul principal este local trivial. Adică, fiecare punct  $x \in M$  are o vecinătate  $U$  astfel încât  $\pi^{-1}(U)$  este izomorf cu produsul cartezian  $U \times G$ . Fibratul principal  $\mathcal{P} = M \times G$  se numește fibrat trivial.

O clasă importantă de spații fibratate, cu mare aplicabilitate în fizică, este cea a fibratelor vectoriale.

**Definiția 1.3** *Se numește fibrat vectorial un spațiu fibrat diferențiabil  $(E, \pi, M, F, G)$  în care  $F$  este un spațiu vectorial, iar  $G$  este un grup de automorfisme ale lui  $F$ .*

Vom considera numai fibratatele vectoriale în care  $F = R^m$  și  $G = GL(m, R)$ . Reuniunea planelor tangente la toate punctele  $P$  de pe varietatea  $M$ ,

$$T(M) = \bigcup T_P(M) \quad (1.17)$$

formează fibratul tangent al varietății  $M$ . Obiectele sale sunt vectorii tangenți  $X_P$ .  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{P(i=1,n)}$  sunt liniar independenți și formează o bază în  $T_P(M)$ , numită bază de coordonate sau bază canonică. Dacă  $M$  este o varietate diferențiabilă, de dimensiune  $n$ , atunci  $T(M)$  este o varietate de dimensiune  $2n$ . Fie  $(x^1, \dots, x^n)$  coordonatele punctului  $P$  de pe varietatea de bază și  $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$  coordonatele locale



pe fibratul tangent, incluse de coordonatele locale pe varietatea de bază

$$X_P = \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_P \quad (1.18)$$

Acum putem defini fibratul cotangent al varietății  $M$ . Sistemul  $\{dx^i\}_{i=1,n}$  formează o bază pentru spațiul vectorial dual tangent  $T_P^*(M)$ . Un element al spațiului liniar  $T_P^*(M)$  este vectorul cotangent

$$\theta = \theta_i(dx^i)_P \quad (1.19)$$

Reuniunea după  $P$  a tuturor spațiilor  $T_P^*(M)$  formează fibratul cotangent al varietății  $M$ .

Fie  $\mathcal{P}(M, G)$  un fibrat principal. Pentru fiecare  $u$  în  $\mathcal{P}$ , fie  $T_u(\mathcal{P})$  spațiul tangent în  $u$  la  $\mathcal{P}$ .  $G_u$  reprezintă subspațiul lui  $T_u(\mathcal{P})$  constând din vectorii tangenți la fibra prin  $u$ . Avem următoarea sumă directă

$$T_u(\mathcal{P}) = G_u + Q_u \quad (1.20)$$

unde  $G_u$  este numit subspațiu vertical, iar  $Q_u$  subspațiu orizontal al lui  $T_u(\mathcal{P})$ .

Orice vector  $X \in T_u(\mathcal{P})$  poate fi scris, în mod unic, ca fiind

$$X = V + H \quad (1.21)$$

unde  $V$  este un vector vertical, iar  $H$  este un vector orizontal. Practic, prin vectori verticali,  $V$ , vom înțelege vectorii care acționează în lungul aceleiași fibre (ca și grupul  $G$ ). Pentru o bază oarecare,  $\{V_a\}_{a=1,n}$  putem scrie  $V = \kappa^a V_a$  cu

$$[V_a, V_b] = C_{ab}^d V_d \quad (1.22)$$

Baza  $\{V_a\}$  poate fi exprimată în funcție de baza locală

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial g^i} \quad (1.23)$$



unde  $g^i$  sunt coordonatele elementului  $g \in G$ , prin

$$V_a = B_a^i \partial_i \quad (1.24)$$

### Exemplul 2

Fie  $G$  grupul matricilor neregulate (1.8) cu elementele  $(g^{ij})$  și fie  $G_a (a = \overline{1, n})$  un set de matrici, satisfăcând relațiile de comutatori (1.22). Exprimăm baza Cartan  $\{V_a\}$  sub forma

$$V_a = G_a^{ij} g_{ki} \frac{\partial}{\partial g_{kj}} \quad (1.25)$$

unde  $g_{ij}$  sunt elementele matriciale ale lui  $g \in G$ . Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} [V_a, V_b] &= \left[ G_a^{ij} g_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ki}}, G_b^{sm} g_{pm} \frac{\partial}{\partial g_{ps}} \right] = \\ &= (C_{ab}^d) G_d^{im} g_{pm} \frac{\partial}{\partial g_{pi}} = C_{ab}^d V_d \end{aligned} \quad (1.26)$$

Demonstrăm că  $V$ , dat de (1.25), acționează asupra funcției  $f(x, g)$  la fel ca și grupul  $G$ , adică

$$\begin{aligned} e^V f(x, g) &= e^{\xi^a G_a^{ij} g_{sj} \frac{\partial}{\partial g_{si}}} f(x, g) = \\ &= \left( 1 + \xi^a G_a^{ij} g_{sj} \frac{\partial}{\partial g_{si}} \right) f = \\ &= f(x^\mu, g_{si} + \xi^a G_a^{ij} g_{sj}) = f(x^\mu, g_{sj} (\delta_i^j + \xi^a G_a^i)) = \\ &= f(x^\mu, g_{sj} e^{\xi^a G_a}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Atribuim fiecărui  $u \in \mathcal{P}$  subspațiul  $Q_u$ , diferențiabil, și introducem conexiunea  $\Gamma$ . Proiecția  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$  induce o aplicație liniară  $\pi^*$ . Convenim să notăm această aplicație tot cu  $\pi$ ,

$$\pi : T_u(\mathcal{P}) \rightarrow T_x(M)$$



pentru fiecare  $u \in \mathcal{P}$ , unde  $x = \pi(u)$ . Pentru o conexiune dată,  $\pi$  aplică subspațiul orizontal  $Q_u$  izomorf în  $T_x(M)$ . Liftul orizontal al unui câmp vectorial  $X$  pe  $M$  este un câmp orizontal unic,  $\hat{H}$ , în  $\mathcal{P}$ , care se proiectează în  $X$ :

$$\pi(\hat{H}_\mu) = X_{\pi(u)} \quad (1.28)$$

pentru fiecare  $u \in \mathcal{P}$ . Fie  $(x^\mu)$  un sistem local de coordonate, într-o vecinătate  $U$ , în varietatea de bază  $M$ . Fie  $\hat{H}_\mu$  liftul orizontal în  $\pi^{-1}(U)$  al câmpului vectorial  $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$  din  $U$ . Atunci,  $\{\hat{H}_\mu\}$  formează o bază locală în spațiul  $Q_\mu$  din  $\pi^{-1}(U)$ . Vectorii  $\{\hat{H}_\mu\}$  sunt liniar independenți și comută cu vectorii  $V_a$

$$[\hat{H}_\mu, V_a] = 0 \quad (1.29)$$

Este valabilă relația

$$\hat{H}_\mu = \partial_\mu - A_\mu^a l_a \quad (1.30)$$

Spre deosebire de  $\{V_a\}$ , care corespunde acțiunii grupului la dreapta,  $\{l_a\}$  corespund acțiunii grupului la stânga.

Dacă varietatea  $M$  este curbă și se lucrează cu baza rigidă  $\{e_\mu\}$ , atunci (1.30) devine

$$\hat{H}_\mu = e_\mu - A_\mu^a l_a \quad (1.31)$$

În elementul unitate  $g = e$  al grupului  $G$ ,  $\hat{H}_\mu$  acționează asupra funcțiilor din fibrat  $\psi(x, g)$  ca o derivată covariantă

$$\hat{H}_\mu \psi(x, g)|_{g=e} = D_\mu \psi(x) = (e_\mu - A_\mu^a X_a) \psi(x) \quad (1.32)$$



**Exemplul 3**

Considerăm vectorii  $l_a$  de forma

$$l_a = G_a^{ij} g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ki}} \quad (1.33)$$

Acțiunea elementului de grup asupra unei funcții  $f(x^\mu, g)$  este

$$\begin{aligned} e^{\xi^a l_a} f(x^\mu, g) &= e^{\xi^a G_a^{ij} g^{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ki}}} f(x^\mu, g) = \\ &= \left[ 1 + \xi^a G_a^{ij} g^{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ki}} \right] f(x^\mu, g) = f(x, g^{ki} + \xi^a G_a^{ij} g^{jk}) = \\ &= f \left[ x^\mu, (\delta_j^i + \xi^a G_a^{ij}) g^{jk} \right] = f \left[ x^\mu, (e^{\xi^a X_a}) g \right] \end{aligned}$$

În încheiere, vom introduce, într-o manieră pedagogică, câteva noțiuni de geometrie diferențială, cum ar fi cele de conexiune liniară, derivată covariantă, tensorul de curbura, 1-formele de conexiune, ecuațiile Cartan etc., absolut necesare pentru parcurgerea capitolelor următoare.

\*

\*

\*

Fie  $\mathcal{P}(M, G)$  un fibrat principal și  $\rho$  o reprezentare a lui  $G$  în  $GL(m, R)$ . Fie  $E(M, R^m, G, \rho)$  fibratul asociat cu fibra standard  $R^m$ , pe care  $G$  acționează prin  $\rho$ . Numim  $E$  un fibrat vectorial real peste  $M$ . Fiecare fibră  $\pi_E^{-1}(x)$ ,  $x \in M$  a lui  $E$  are o structură de spațiu vectorial. Fie  $\mathcal{F}(M)$  inelul funcțiilor diferențiabile pe  $M$  și fie  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  - modulul secțiunilor diferențiabile  $\varphi : M \rightarrow E$  ale lui  $E$ .

**Definiția 1.4** O lege de derivare pe  $E$  sau o conexiune liniară în  $\mathcal{E}$  este o lege de compoziție  $D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , notată cu  $(X, \varphi) \rightarrow D_X \varphi$



care asociază perechii  $(X, \varphi)$  o secțiune  $D_X \varphi$  a lui  $E$ , astfel încât sunt îndeplinite condițiile:

(i)  $D$  este  $\mathcal{F}$  - liniară în raport cu câmpurile vectoriale, adică

$$\begin{aligned} D_{X+Y}\varphi &= D_X\varphi + D_Y\varphi, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \varphi \in \mathcal{E} \\ D_{fX}\varphi &= f D_X\varphi, \quad X \in \mathcal{X}(M), \varphi \in \mathcal{E}, f \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (1.34)$$

(ii)  $D$  se comportă ca o lege de derivare (de tip special), adică

$$\begin{aligned} D_X(\varphi + \psi) &= D_X\varphi + D_X\psi, \quad X \in \mathcal{X}(M), \varphi, \psi \in \mathcal{E} \\ D_X(f\varphi) &= f D_X\varphi + df(X)\varphi, \quad X \in \mathcal{X}(M), \varphi \in \mathcal{E}, f \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (1.35)$$

(iii) operatorul  $D$  este un operator local.

**Definiția 1.5** Pentru o lege de derivare, definită pe fibratul vectorial  $E$  peste  $M$ , curbura sa este

$$R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]} \quad (1.36)$$

Considerăm câmpul vectorial  $X$  pe  $M$ , în baza  $\left\{ \frac{\partial}{\partial X^i} \right\}_{i=1, \overline{m}}$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial X^i} \quad (1.37)$$

și fie  $\varphi = \varphi^a s_a$  ( $a = \overline{1, n}$ ) o secțiune diferențiabilă a lui  $E$ . Utilizând Definiția (1.4), vom obține:

$$D_X \varphi = D_{X^i \partial / \partial X^i} (\varphi^a s_a) = X^i \left( \frac{\partial \varphi^a}{\partial X^i} s_a + \varphi^a D_{\partial / \partial X^i} s_a \right) \quad (1.38)$$



Definim coeficienții de conexiune prin

$$D_{\partial/\partial X^i} s_a = \Gamma_{ai}^b s_b \quad (1.39)$$

și avem

$$D_X \varphi = X^i \left( \frac{\partial \varphi^a}{\partial X^i} + \Gamma_{bi}^a \varphi^b \right) s_a \quad (1.40)$$

**Definiția 1.6** O conexiune liniară pe varietatea  $M$  este o lege de derivare în fibratul tangent  $T(M)$  al lui  $M$ :

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned} \quad (1.41)$$

care satisface proprietățile:

$$\begin{aligned} (i) \quad &\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \\ (ii) \quad &\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y \\ (iii) \quad &\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_2} Y + \nabla_{X_1} Y \\ (iv) \quad &\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \end{aligned} \quad (1.42)$$

Forma de curbura se introduce, ca în (1.36), prin

$$R(X, Y)Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.43)$$

**Definiția 1.7** Torsiunea conexiunii liniare pe  $M$  este aplicația

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \quad (1.44)$$

dată de expresia

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.45)$$



Exprimăm câmpurile  $X$  și  $Y$  în baza locală  $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=\overline{1,m}}$  astfel

$$\begin{aligned} X &= X^i \partial_i \\ Y &= Y^j \partial_j \end{aligned} \quad (1.46)$$

și introducem notația

$$\nabla_{\partial_i} = \nabla_i \quad (1.47)$$

Expresia (1.40) devine

$$\nabla_X Y = X^i (\partial_i Y^j + \Gamma_{ki}^j Y^k) \partial_j \quad (1.48)$$

unde am notat

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ji}^k \partial_k \quad (1.49)$$

În particular, dacă  $X = \{\partial_i\}$ , vom obține, pentru (1.48), expresia uzuală a derivatei covariante

$$\nabla_i Y^j = \partial_i Y^j + \Gamma_{ki}^j Y^k, \quad (1.50)$$

componentele tensorului de curbura se obțin, din (1.43), ca

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = (\partial_i \Gamma_{kj}^s - \partial_j \Gamma_{ki}^s + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pi}^s - \Gamma_{ki}^p \Gamma_{pj}^s) \partial_s, \quad (1.51)$$

iar componentele tensorului de torsiune, se obțin din (1.45), ca fiind

$$T(\partial_i, \partial_j) = (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) \partial_k \quad (1.52)$$

**Definiția 1.8** *O varietate diferențiabilă, de dimensiune  $m$ , se numește paralelizabilă, dacă pe ea sunt definite  $m$  câmpuri vectoriale,  $X_1, \dots, X_m$ , care formează un câmp de repere ale lui  $T(M)$ , peste toată varietatea  $M$ .*



## Observații

1. Dacă  $M$  este paralelizabilă, atunci orice câmp  $Y$  are o descompunere globală  $Y = Y^i X_i$ .
2. Grupurile Lie sunt varietăți paralelizabile.
3. Nu orice varietate diferențiabilă este paralelizabilă.  
(De exemplu, sfera  $S^2$ ).

## Exemplul 4

Sfera  $S^3$ , definită ca mulțimea punctelor din  $R^4$  cu distanța până la origine egală cu unitatea,

$$S^3 = \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in R^4, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\} \quad (1.53)$$

este o varietate paralelizabilă. În orice punct al lui  $S^3$ , vom defini trei câmpuri independente,  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , prin

$$\begin{aligned} X_1 &= x^4 \partial_1 + x^3 \partial_2 - x^2 \partial_3 - x^1 \partial_4 \\ X_2 &= -x^3 \partial_1 + x^4 \partial_2 + x^1 \partial_3 - x^2 \partial_4 \\ X_3 &= x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + x^4 \partial_3 - x^3 \partial_4 \end{aligned} \quad (1.54)$$

tangente la sfera  $S^3$  și satisfăcând algebra

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 2X_3 \\ [X_2, X_3] &= 2X_1 \\ [X_3, X_1] &= 2X_2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Orice câmp vectorial  $A$  pe  $M$  se poate exprima în această bază ca

$$A = A^i X_i \quad (1.56)$$



Definim conexiunea liniară pe varietatea  $S^3$  ca fiind

$$\nabla_A B = A^i (X_i B^j) X_j \quad (1.57)$$

În raport cu conexiunea (1.57), vectorii bazei au proprietatea

$$\nabla_{X_i} X_j = 0 \quad (1.58)$$

Câmpurile tensoriale de curbura și de torsiune, calculate cu ajutorul formulelor generale (1.43) și respectiv (1.45), au expresiile

$$R(X_i, X_j) X_k = 0 \quad (1.59)$$

respectiv

$$T(X_i, X_j) = -[X_i, X_j] = -2\varepsilon_{ijk} X^k \quad (1.60)$$

și ne arată că pe sfera  $S^3$  se poate defini o conexiune liniară de curbura nulă, fără ca torsiunea să fie nulă.

În cele ce urmează, vom exprima relațiile (1.43), (1.45) și (1.48) într-o bază rigidă  $\{e_a\}_{a=\overline{1,n}}$ , satisfăcând algebra

$$[e_a, e_b] = C_{ab}^d e_d, \quad (1.61)$$

și având duala  $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,n}}$  dată de

$$\omega^a(e_b) = \delta_b^a \quad (1.62)$$

Tensorul de curbura (1.43) devine

$$\begin{aligned} R(e_c, e_d) e_b &= R_{bcd}^a e_a = \nabla_c (\nabla_d e_b) - \nabla_d (\nabla_c e_b) - \nabla_{[e_c, e_d]} e_b = \\ &= (\Gamma_{bd|c}^a - \Gamma_{bc|d}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a - \Gamma_{de}^a C_{cd}^e) e_a, \end{aligned} \quad (1.63)$$



unde am introdus notația

$$Y_{|b}^a = e_b(Y^a) \quad (1.64)$$

iar tensorul de torsiune, (1.45), are forma

$$\begin{aligned} T(e_a, e_b) = T_{ab}^c e_c &= \nabla_a e_b - \nabla_b e_a - [e_a, e_b] = \\ &= (\Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c - C_{ab}^c) e_c \end{aligned} \quad (1.65)$$

în care, cu  $\Gamma_{ab}^c$  s-au notat

$$\nabla_{e_b} e_a \equiv \nabla_b e_a = \Gamma_{ab}^c e_c \quad (1.66)$$

și respectiv

$$\nabla_{e_b} \omega^a \equiv \nabla_b \omega^a = -\Gamma_{cb}^a \omega^c \quad (1.67)$$

Expresia (1.48) capătă forma

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a} (Y^b e_b) = \\ &= X^a Y_{|a}^b e_b + X^a Y^b \Gamma_{ba}^c e_c, \text{ cu } Y_{|a}^b = e_a Y^b \end{aligned} \quad (1.68)$$

Vectorii bazei rigide (1.61) și vectorii bazei duale (1.62) pot fi exprimați în baza canonică  $\{\partial_i\}_{i=\overline{1,n}}$  și duala sa,  $\{dx^i\}$ , astfel

$$\begin{aligned} e_a &= e_a^i \partial_i \\ \omega^a &= \omega_i^a dx^i \end{aligned} \quad (1.69)$$

Aplicăm operatorul diferențială exterioară celei de a doua ecuații din (1.69) și avem

$$d\omega^a = \partial_k \omega_i^a dx^k \wedge dx^i \quad (1.70)$$

Utilizând formulele (1.66), rescriem termenii în baza  $\omega^b \wedge \omega^c$ , ( $b < c$ ).

Definim acum 1-formele de conexiune, prin

$$\Gamma_b^a = \Gamma_{bc}^a \omega^c \quad (1.71)$$



și 2-forma de torsiune

$$T^a = T_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c \quad (1.72)$$

și obținem ecuațiile de structură ale lui E. Cartan:

$$d\omega^a + \Gamma_b^a \wedge \omega^b = \frac{1}{2} T^a \quad (1.73)$$

$$d\Gamma_b^a + \Gamma_e^a \wedge \Gamma_b^e = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d \quad (1.74)$$

**Definiția 1.9** Se numește lege de derivare riemanniană sau conexiune riemanniană, pe un fibrat vectorial  $E$ , dotat cu o metrică  $\eta$ , o conexiune liniară  $D$  pe  $E$ , astfel încât derivata covariantă a lui  $\eta$  în raport cu  $D$  este nulă,

$$D\eta = 0 \quad (1.75)$$

**Teorema 1.1** Pe orice varietate diferențiabilă există o structură riemanniană.

O structură riemanniană pe  $M$  este dată de un produs scalar pe fibratul tangent  $T(M)$ . Exprimând vectorii  $X$  și  $Y$  în baza locală, adică

$$\begin{aligned} X &= X^i \partial_i \\ Y &= Y^j \partial_j \end{aligned} \quad (1.76)$$

produsul lor scalar va fi

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \quad (1.77)$$

unde am introdus notația

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) \quad (1.78)$$



Printr-o metrică riemanniană, vom înțelege un câmp tensorial covariant simetric, pozitiv definit, de ordin 2.

Componentele contravariante ale lui  $g$  se definesc prin

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j) \quad (1.79)$$

cu

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (1.80)$$

și

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (1.81)$$

Metrica unei varietăți riemanniene (adică o varietate diferențiabilă înzestrată cu o metrică riemanniană) este legată de pătratul elementului de distanță între două puncte infinitezimal vecine, pe varietatea dată,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.82)$$

**Teorema 1.2** *Pe orice varietate riemanniană  $M$  există o conexiune metrică de torsiune nulă, unică.*

Această conexiune metrică, simetrică, se numește conexiunea Levi-Civita și, exprimată în coordonate canonice, are expresia

$$g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_k) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (1.83)$$

Pentru câmpurile vectoriale  $X, Y, Z$  pe  $M$ , avem următoarea expresie generală

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + \\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)\} \end{aligned} \quad (1.84)$$



Tensorul Riemann de curbura este un câmp tensorial, de ordinul 4, definit, în fiecare punct  $x \in M$ ,

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) : T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow R \quad (1.85)$$

prin

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1), \quad X_i \in T_x(M), \quad i = \overline{1, 4} \quad (1.86)$$

Dacă  $R^i_{jkm}$  și  $g_{ij}$  sunt componentele tensorului de curbura și ale tensorului metric, în raport cu un sistem de coordonate locale, atunci componentele  $R_{ijkm}$  ale tensorului Riemann de curbura sunt

$$R_{ijkm} = g_{is}R^s_{jkm} \quad (1.87)$$

Dacă  $M$  este un spațiu de curbura constantă,  $k$ , atunci avem

$$R_{ijkm} = k(g_{ik}g_{jm} - g_{jk}g_{mi}) \quad (1.88)$$

Câmpul tensorial covariant de ordin 2, numit Ricci și notat cu  $S$ , se definește pe o varietate riemanniană  $M$ , prin

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(V_i, X)Y, V_i) = \sum_{i=1}^n R(V_i, Y, V_i, X) \quad (1.89)$$

unde  $X, Y \in T_x(M)$  și  $V_1, \dots, V_n$  este o bază ortonormală în  $T_x(M)$ .

Notând componentele tensorului Ricci cu  $R_{js}$

$$R_{js} = g^{ik}R_{ijks} \quad (1.90)$$

putem scrie curbura scalară, în termeni de  $g^{ij}$  și  $R_{ij}$  sub forma

$$R = g^{ij}R_{ij} \quad (1.91)$$



Intr-o bază oarecare  $\{e_a\}$ , (1.61), cu duala  $\{\omega^a\}$ , simbolurile lui Christoffel au expresia

$$\begin{aligned}\Gamma_{ba}^d = \frac{1}{2}g^{ds} \{ & g_{bs|a} + g_{sa|b} - g_{ab|s} + \\ & + C_{sab} + C_{bsa} - C_{abs} \}\end{aligned}\quad (1.92)$$

În capitolele următoare, vom lucra preponderent într-o bază  $\{e_a\}$ , pe varietatea  $S^3$ , rigidă. În acest caz, componentele  $g_{ab}$  fiind constante, (1.92) devine

$$\Gamma_{ba}^d = \frac{1}{2}g^{ds} (C_{sab} + C_{bsa} - C_{abs}) \quad (1.93)$$

fiind exprimat doar în funcție de constantele de structură ale algebrei Lie (1.61).

## 1.2 Universul Einstein

În același an, 1917, în care desăvârșește formularea Teoriei Relativității Generale, Albert Einstein are o a doua idee revoluționară (în acest domeniu) și anume deducerea, pe baza unei modelări rezonabile, a unei soluții exacte a ecuațiilor sale, valabilă la scara întregului Univers.

Caracterul original al acestei idei constă în faptul că era pentru prima oară când se încerca elaborarea unui cadru teoretic, ferm și extrem de modern pentru vremea aceea, al unei noi ramuri a fizicii (și a științei în general) numită Cosmologie.

Dacă unora dintre cititori această afirmație le poate părea oarecum hazardată, trebuie să amintim că, în acei ani, deși Astronomia era bine consolidată iar în Astrofizică se făceau progrese însemnate,



nivelul înțelegerii conceptuale și mai ales relațional - predictibile, a structurii de scară largă a Universului observabil, era încă în stadiul quasi - cosmogonic, iar încercările de extrapolare ad litteram a legii atracției universale la scară megagalactică nu au condus decât la o serie de paradoxuri "stânjenitoare" ce indicau imposibilitatea înțelegerii clasice, pre - einsteiniene, a Universului ca întreg. Dintre acestea, cele formulate de Seelinger și Olbers erau, prin consecințele lor, cele mai grave. Intr-un univers minkowskian, absolut plat, deschis și infinit în spațiu și timp, o distribuție continuă, nelimitată și quasi - uniformă de substanță (radiantă) ar fi produs tensiuni gravitaționale (de tip newtonian) infinite pe frontiera oricărei structuri materiale, împreună cu o luminozitate infinită, ce pur și simplu ar fi "sfărâmat și pârjolit", până la eventualii constituenți elementari, orice agregat complex ce s-ar fi dorit microscopic stabil. Era nevoie de un punct de vedere cu totul deosebit, fizic și nu mai puțin, filozofic, asupra proprietăților geometrice ultramacroscopice ale spațiu - timpului, ca bază a realității fizice, care să elimine aceste două paradoxuri. Aici contribuția lui Einstein a fost, atât calitativ cât și cantitativ, esențială, cu predictibilitate științifică completă (în cadrul modelului de univers elaborat) și cu prioritate absolută, în ceea ce astăzi numim Cosmologie Relativistă. Pe lângă Principiul Cosmologic, conform căruia spațiul fizic tridimensional trebuie să fie omogen și izotrop la scară largă, adică, la o epocă dată, să arate la fel din orice punct al său și pe orice direcție ar fi privit, și principiul lui Weyl care afirmă că, la scară foarte largă, timpul nu este afectat de prezența materiei, Einstein mai introduce încă două ipoteze:

- spațiul fizic, în loc să fie plat, este de curbură constantă pozitivă și



- la nivel megagalactic, întreaga materie (din Univers) pare a fi "netezită", având aspectul unui fluid perfect, de presiune nulă, în repaus peste tot, ce are drept constituent elementar (precum moleculele într-un fluid obișnuit) galaxia.

Nu vom discuta aici dacă astăzi aceste ipoteze mai sunt valabile. Ca un răspuns scurt, desigur că nu; dar analiza detaliată a felului în care (și a motivelor din care) ele au fost modificate și reactualizate ar reclama elaborarea unei lucrări de dimensiuni (absolut) respectabile ce ar trebui să cuprindă activ (cu calcule și rezultate concrete) aproape toate domeniile fizicii contemporane. Ceea ce dorim este să familiarizăm, fizico - matematic, cititorul cu acest cel mai simplu model de Univers (relativist) care, orice s-ar spune și oricum ar fi privit, stă la baza celor mai multe cunoștințe actuale.

Așadar, să analiză mai întâi necesitatea ipotezelor.

### 1. *De ce Principiul Cosmologic ?*

Aici, cel puțin sub aspect filozofic și nu de puține ori metafizic, povestea este foarte veche. Încă de cu mult înaintea erei noastre, au existat vizionari ce au susținut, în scrierile lor, că Pământul, ca și restul corpurilor cerești, sunt simple "grăunțe materiale" călătorind prin spații abisale, purtate de un principiu unic, cum ar fi, în filozofia hindusă, cel al desăvârșirii acțiunii (a karmei) sau, în taoism, cel al întoarcerii la (și unirii cu) vidul tuturor vidurilor. De aici și până la postularea uniformității proprietăților globale ale acestor (meta)structuri nu era decât un pas. Oricum, datorită necesității formulării lor într-un cadru matematic bine definit, omenirii i-au fost necesare milenii. Mai apoi, după stingerea euforiei pozitivismului primitiv al geocentrismului, a început aven-



tura heliocentrismului, a fost enunțată "pluralitatea lumilor", s-a introdus un concept fundamental, cel de inerție, iar marele Newton definește, pentru prima oară în fizică, e drept cu caracter clasic și dintr-un punct de vedere pasiv, (în sensul neinteracțiunii cu materia), conceptele de spațiu și timp. Datorită caracterului euclidian al primului concept, acesta posedă, în mod evident, proprietățile de omogenitate și izotropie. În ce privește al doilea concept, timpul, acesta este definit, de la bun început (în fizica clasică), drept o măsură a duratei unui fenomen, ca un parametru monoton crescător (de la trecut spre viitor) ce variază întotdeauna uniform, independent de poziția sau starea de mișcare a oricărui observator și de asemenea, independent de conținutul material al Universului. Desigur, valabilitatea acestei definiții (a timpului) a fost mai întâi infirmată în cadrul Teoriei Relativității Restrânse, pentru cazul sistemelor inerțiale, iar mai apoi complet spulberată, sub aspect general, în cadrul Teoriei Einsteiniene a Gravitației (Teoria Relativității Generale), în cazul sistemelor de referință manifest neinerțiale. Revenind la spațiul tridimensional, cea care surprinde matematic semnificația fizică a proprietăților de omogenitate și izotropie este matematiciana germană Emmy Noether care demonstrează, în teoremele ce-i poartă numele, că omogenitatea spațiului, strâns legată de invarianța la translații a unui sistem fizic, exprimă legea conservării impulsului, iar invarianța la rotații, adică izotropia spațiului, exprimă legea conservării momentului cinetic (orbital). În privința legii de conservare a energiei, ea demonstrează că aceasta este o consecință directă a scurgerii uniforme a timpului. Așadar, că să



concluzionăm, Principiul Cosmologic este necesar, pe de o parte, pentru înlăturarea caracterului poziției speciale a vreunui observator, sau existența vreunei direcții privilegiate în Univers, iar pe de altă parte, pentru a statua valabilitatea legilor de conservare ale impulsului și momentului cinetic, în orice punct al spațiului tridimensional (nu neapărat plat) privit ca 3 - suprafață de foliere, la timp cosmic constant, a întregului Univers. Să trecem la a doua ipoteză.

## 2. De ce Principiul lui Weyl ?

Aici, din punct de vedere fizic, răspunsul nu mai este atât de tranșant ca în cazul primului principiu. Pe lângă ideea conservării energiei în orice punct al Universului, care necesita în baza celei de a treia teoreme a lui Noether, o curgere uniformă a timpului, a fost pur și simplu supoziția lui Einstein că într-un spațiu omogen și izotrop, umplut uniform cu "materie netezită", în repaus global, timpul nu poate fi decât o dimensiune suplimentară, plată și ortogonală celor trei dimensiuni spațiale, exact ca în cazul Universului Minkowski. Se cer acum câteva precizări. În primul rând, dacă timpul nu ar fi fost ortogonal celor 3 - suprafețe spațiale, atunci ar fi existat în metrică termeni de forma

$$ds^2 = \dots + 2g_{\mu 4} dx^\mu dx^4 + \dots, \mu = \overline{1,3}$$

pentru dimensiunile spațiale, care exprimă întotdeauna rotațiile active. Cu alte cuvinte, întregul Univers și cu atât mai mult cel observabil, s-ar fi aflat în rotație. Aceasta presupune existența unei direcții privilegiate, fizic desemnată de axa de rotație, ceea ce contrazice primul principiu, în sensul violării izotropiei. În al



doilea rând, dacă direcția temporală nu ar fi plată, adică dacă  $g_{44}$ , în loc să fie  $-1$ , ar depinde, de exemplu, de coordonatele spațiale, atunci  $g_{44,\mu}$  (cu  $\mu = \overline{1,3}$ ) ar exprima euristic intensitatea câmpului gravitațional în lungul coordonatei  $x^\mu$  și deci, orice particulă test, în loc să-și conserve impulsul, cum cere Principiul Cosmologic prin proprietatea de omogenitate a spațiului, s-ar mișca accelerat după această direcție. În fine, dacă metrica nu ar fi statică, (adică  $g_{\mu 4} \equiv 0$  și  $g_{ik}$ , cu  $i, k = \overline{1,4}$ , complet independenți de timp) atunci gravitația întregului Univers, împreună cu materia ce-i dă naștere, s-ar afla într-o continuă evoluție, ceea ce contrazice ipoteza fluidului perfect în repaus global, făcută de Einstein. După cum aveau să arate cercetările teoretice și observațiile astronomice de scară largă (ulterioare anului 1917), exact acesta a fost principalul punct slab al modelului. Dar, pentru moment, să continuăm cu

### 3. De ce spațiu de curbura constantă pozitivă?

De data aceasta, răspunsul este cât se poate de clar. În primul rând, se știe din geometria diferențială că, dacă o varietate riemanniană  $n$  - dimensională posedă un grup de mișcare  $\frac{n(n+1)}{2}$  - dimensional, adică este omogenă, cu un subgrup ortogonal propriu,  $\frac{n(n-1)}{2}$  - dimensional, care este grupul de izometrie, atunci varietatea respectivă este de curbura constantă. În al doilea rând, considerând, cu  $c = 1$  (viteza luminii în unități așa zis "naturale"), praful cosmologic (adică fluidul perfect de presiune nulă) ca fiind descris de tensorul conservativ impuls-energie

$$T_{ik} = \rho u_i u_k, \quad (1.94)$$



unde  $\rho$  este densitatea volumică de energie proprie (a fluidului), iar  $u_i = g_{ik}u^k$ , cu  $u^k = \frac{dx^k}{d\sigma}$ ,  $d\sigma^2 = -ds^2$  fiind parametrul afin al liniilor de univers, sunt componentele covariante ale câmpului cuadrivitezelor fluidului, atunci, din ecuațiile Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa_0 T_{ik}, \text{ cu } R = g^{pm}R_{pm} \quad (1.95)$$

rezultă, prin contracție cu  $g^{ik}$ ,

$$R = -\kappa_0 \rho g^{ik}u_i u_k \quad (1.96)$$

Dar,

$$g^{ik}u_i u_k = g_{ik}u^i u^k = g_{ik} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} = -\frac{ds^2}{ds^2} = -1 \quad (1.97)$$

și deci, obținem "relația de trasă"

$$R = \kappa_0 \rho \quad (1.98)$$

Cum  $\kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}$  este evident pozitiv, iar  $\rho = \rho_0 c^2$ , unde  $\rho_0$  este densitatea masică proprie a prafului cosmologic, trebuie să fie pozitivă (fiindcă nici până acum nu s-au evidențiat, nicăieri în Univers, structuri materiale de masă negativă), rezultă imediat

$$R > 0 \quad (1.99)$$

În baza principiului lui Weyl, metrica trebuie să fie de forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu - (dt)^2 \quad (1.100)$$

și deci, curbura scalară  $R$  a Universului 4 - dimensional va fi dată de fapt de curbura scalară  $R_{(3)}$  a spațiului tridimensional,

$$R_{(3)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.101)$$



(fiindcă, după cum vom demonstra mai târziu  $R_{44} \equiv 0$ , caracterul plat al direcției temporale) și deci, din “relația de trasă”, obținem

$$R_{(3)} = \kappa_0 \rho > 0 \quad (1.102)$$

#### 4. *De ce praf cosmic în repaus ?*

Ca și în cazul caracterului plat al direcției temporale, aici motivația este preponderent de ordin fizic. Să ne imaginăm că dispunem de o foarte bună scară a distanțelor cosmice și că dorim să explorăm (ca aspect și proprietăți) zone tot mai întinse din Univers. După ce am depășit nivelul sistemului solar, vom avea de așteptat puțin, cât parcurgem distanțele interstelare, până când în câmpul de observație intră primele stele vecine Soarelui. Mărind în continuare distanța, vom constata o creștere simțitoare a numărului acestor stele precum și apariția așa numitelor formațiuni sau nori de praf cosmic (a nu se confunda cu praful cosmic). Puțin după aceasta, pe scara distanțelor, vom vedea că numărul stelelor și al regiunilor cu nori de praf cosmic devine constant, acestea formând o structură gigantică, de sine stătătoare, având formă lenticulară și brațe spirale în planul ecuatorial. Aceasta este Galaxia, iar proiecția pe bolta cerească posedă un diametru de aproximativ 90 mii de ani lumină și o grosime principală, măsurată în lungul axei de rotație a nucleului galactic, de circa 16 mii de ani lumină. Continuând periplul nostru pe scara distanțelor, Galaxia devine “tot mai mică” pe măsură ce parcurgem așa numitele distanțe intergalactice și captăm, în câmpul de observație, tot mai multe galaxii. La un moment dat, numărul acestora devine constant, cam 20, ele formând ceea ce astronomii denumesc



“grupul local” (de galaxii). Transfocalizând mai departe, vom obține noi grupuri, în “vecinătatea” grupului local, și vom constata că toate acestea formează “roiul local” de galaxii. De aici încolo, galaxia devine un simplu “grăunte material”, ce poate fi interpretat ca un constituent elementar al roiului. Mărind în continuare distanța, la sute de milioane de ani lumină, vom vedea Universul spuzit de roiuri de galaxii, ca simple puncte materiale radiante, separate între ele prin zone imense, lipsite de substanță, pe drept cuvânt numite “giant voids”. De aici încolo, în acord cu actualele observații, roiurile nu se mai asociază în superroiuri astfel încât, atunci când ajungem la scară megagalactică, adică la nivelul întregului Univers, observabil (cam 12 miliarde de ani lumină), acesta pare “umplut” cu un fluid (aproape) perfect, de presiune foarte redusă, practic zero, lipsit de curenți convectivi (ultramicroscopici) și alcătuit “molecular” din roiuri de galaxii. Presiunea acestui fluid este foarte redusă, deoarece energia cinetică a fiecărui roi este mult mai mică decât energia de repaus. De asemenea, fluidul pare a fi în repaus deoarece observațiile actuale nu confirmă existența unei mișcări ordonate, alta decât expansiunea cosmologică (de care nu se știa nimic în 1917, când Einstein a elaborat modelul), la scară megagalactică, a roiurilor de galaxii. Prin urmare, într-un reper tetradic pseudo - ortonormal (1.69)

$$\vec{e}_a = e_a^i \partial_i, \text{ cu } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, i = \overline{1,4} \quad (1.103)$$

$$g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \eta_{ab} = \text{diag}[1, 1, 1, -1] = g_{ik} e_a^i e_b^k, a, b = \overline{1,4} \quad (1.104)$$



ca bază a secțiunilor fibratului tangent  $T(M)$ , cu dualul

$$\omega^a = \omega^a_i dx^i, \quad (1.105)$$

cu

$$\omega^a_i = \eta^{ab} g_{ik} e_b^k \quad (1.106)$$

și

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \quad (1.107)$$

ca bază a secțiunilor fibratului cotangent  $T^*(M)$ , ceea ce rămâne din forma generală

$$T_{ab} = (\rho + \varepsilon + p) u_a u_b + \eta_{ab} p \quad (1.108)$$

cu  $\varepsilon$  ca energie volumică internă și

$$u_a = \eta_{ab} u^b = \eta_{ab} \frac{\omega^b}{d\sigma} \quad (1.109)$$

drept componente pseudo - ortonormale ale 4 - vitezei, a tensorului conservativ impuls - energie pentru un fluid perfect, este forma particulară

$$T_{ab} = \rho \eta_{a4} \eta_{b4} \quad (1.110)$$

a tensorului conservativ pentru "praful cosmologic", dat fiind că, în acest caz

$$\varepsilon = 0, \quad p = 0, \quad u^\mu = 0, \quad \mu = \overline{1,3} \text{ și } u_4 = -1 = \eta_{44} \quad (1.111)$$

Avem acum toate elementele necesare demersului matematic. Datorită izotropiei și Principiului Weyl, metrica trebuie să fie ultrastatică și de simetrie sferică, adică

$$ds^2 = (dr)^2 + a^2 e^{2f(r)} [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] - (dt)^2 \quad (1.112)$$



unde,  $a > 0$  este o constantă cu dimensiune de lungime,  $r$  este coordonata de tip radial ( $r \in R_+$ ), iar  $f : R_+ \rightarrow R$  este o funcție (reală) de clasă (de diferențiabilitate) cel puțin  $C^2$ . Baza duală tetradic pseudo-ortonormală peste secțiunile fibratului cotangent  $T^*(M)$  va fi definită de 1 - formele

$$\begin{aligned}\omega^1 &= dr \\ \omega^2 &= ae^f d\theta \\ \omega^3 &= ae^f \sin \theta d\varphi \\ \omega^4 &= dt\end{aligned}\tag{1.113}$$

cu duala corespunzătoare, (1.62), peste secțiunile lui  $T(M)$ ,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \partial_r \\ \vec{e}_2 &= \frac{e^{-f}}{a} \partial_\theta \\ \vec{e}_3 &= \frac{e^{-f}}{a} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \\ \vec{e}_4 &= \partial_t\end{aligned}\tag{1.114}$$

Din prima ecuație Cartan (1.73), în absența torsiunii,

$$d\omega^a = \Gamma^a_{[bc]} \omega^b \wedge \omega^c, \text{ cu } 1 \leq b < c \leq 4;\tag{1.115}$$

rezultă coeficienții esențiali de conexiune, (1.66),

$$\begin{aligned}\Gamma_{212} &= -\Gamma_{122} = \Gamma_{313} = -\Gamma_{133} = f_{|1} \\ \Gamma_{323} &= -\Gamma_{233} = \frac{e^{-f}}{a} \cot \theta\end{aligned}\tag{1.116}$$

cu  $f_{|1} = \vec{e}_1(f) = \partial_r f$ , astfel încât, dintre 1 - formele de conexiune



(1.71), rămân diferite de zero numai

$$\begin{aligned}\Gamma_{12} &= -f_{|1} \omega^2 \\ \Gamma_{13} &= -f_{|1} \omega^3 \\ \Gamma_{23} &= -\frac{e^{-f}}{a} \cot \theta \omega^3\end{aligned}\quad (1.117)$$

Din al doilea set al ecuațiilor Cartan de structură, (1.74), adică

$$R_{ab} = d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma_b^c, \quad 1 \leq a < b \leq 4, \quad (1.118)$$

se obțin ca algebric esențiale numai următoarele 2 - forme de curbura

$$\begin{aligned}R_{12} &= -[f_{|11} + (f_{|1})^2] \omega^1 \wedge \omega^2 \\ R_{13} &= -[f_{|11} + (f_{|1})^2] \omega^1 \wedge \omega^3 \\ R_{23} &= -\left[(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2}\right] \omega^2 \wedge \omega^3\end{aligned}\quad (1.119)$$

astfel încât componentele nenule ale tensorului de curbura în raport cu tetradul  $\{\vec{e}_a\}_{a=\overline{1,4}}$  sunt date de expresiile

$$\begin{aligned}R_{1212} = R_{1313} &= -[f_{|11} + (f_{|1})^2] \\ R_{2323} &= \frac{e^{-2f}}{a^2} - (f_{|1})^2\end{aligned}\quad (1.120)$$

În aceste condiții, pentru tensorul Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}^c \quad (1.121)$$

obținem următoarele componente netriviale:

$$\begin{aligned}R_{11} &= -2[f_{|11} + (f_{|1})^2] \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{e^{-2f}}{a^2} - [f_{|11} + 2(f_{|1})^2]\end{aligned}\quad (1.122)$$



care conduc la scalarul de curbura, (1.91),

$$R = -2 \left[ 2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \right] \quad (1.123)$$

și la următoarele componente algebric esențiale

$$\begin{aligned} G_{11} &= (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \\ G_{22} &= G_{33} = f_{|11} + (f_{|1})^2 \\ G_{44} &= - \left[ 2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (1.124)$$

ale tensorului Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \text{ cu } g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}[1, 1, 1, -1] \quad (1.125)$$

În absența oricărei alte forme de materie decât praful cosmologic în repaus, ecuațiile Einstein

$$G_{ab} = \kappa_0 \rho \eta_{a4} \eta_{b4} \quad (1.126)$$

s-ar reduce efectiv la sistemul

$$\begin{aligned} (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= 0 \\ f_{|11} + (f_{|1})^2 &= 0 \\ 2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\kappa_0 \rho \end{aligned} \quad (1.127)$$

Dar, după cum se poate observa scriind a treia ecuație sub forma

$$2[f_{|11} + (f_{|1})^2] + \left[ (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \right] = -\kappa_0 \rho \quad (1.128)$$

și utilizând primele două ecuații (care sunt compatibile), rezultă imediat că nu avem ca soluție decât spațiu - timpul Minkowski

$$e^f = \frac{r}{a} \Leftrightarrow ds^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] - (dt)^2 \quad (1.129)$$



complet lipsit de materie, dat fiind că, din ecuația pentru densitate, rezultă

$$\rho = 0 \quad (1.130)$$

La vremea ei, această situație i-a dat “ceva bătaie de cap” lui Einstein. Totuși, bazându-se pe faptul că efectuarea unor contracții succesive în al doilea set al identităților lui Bianchi, conduce la

$$G_{;b}^{ab} = 0 \quad (1.131)$$

care este în deplin acord cu ecuația de mișcare

$$T_{;b}^{ab} = 0 \quad (1.132)$$

a surselor materiale ale câmpului gravitațional, Einstein observă că, datorită caracterului metric al conexiunii Levi - Civita

$$g_{ab;c} = 0, \quad (1.133)$$

adăugarea unui “termen cosmologic” de forma  $g_{ab}\Lambda$ , cu  $\Lambda = \text{const.}$ , în membrul stâng al ecuațiilor sale, nu violează, în nici un fel, caracterul conservativ al tensorului impuls - energie  $T_{ab}$ , al surselor, ba chiar completează, de o manieră unică (după cum se poate demonstra), ecuațiile relativist generale ale câmpului gravitațional

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = \kappa_0 T_{ab} \quad (1.134)$$

De la Einstein încoace,  $\Lambda$  poartă numele de *constantă cosmologică*, având dimensiunea de  $(\text{lungime})^{-2}$  și este estimată și astăzi (cu oarecare incertitudine) ca situându-se undeva în domeniul de valori  $[0, 10^{-50}) \text{ m}^{-2}$ . Din nou sunt necesare câteva completări. Încă din momentul introducerii ei (în 1917) atât fizicienii cât și filozofii s-au împărțit în două tabere vis-à-vis de semnificația și rolul acestui “termen cosmologic”.



O primă grupare susținea că nu există nici un motiv fizico-matematic pentru ca o astfel de constantă să nu fie introdusă. Ea respectă Principiul Echivalenței, conform căruia câmpul gravitațional este descris intrinsec numai de tensorul metric fundamental ( $g_{ik}$ ) al metricii spațiu - timpului și completează Principiul lui Mach, afirmând că inerția corpurilor nu este numai un produs al acțiunii tuturor celorlalte corpuri din Univers ci și o consecință a proprietăților geometrice globale, intrinseci, ale spațiu - timpului însuși. Chiar și în absența materiei ordinare, când  $T_{ab} \equiv 0$ , așa cum a arătat pentru prima dată de Sitter, chiar în același an 1917, Universul se poate auto-organiza într-o structură spațio - temporală evolutivă, de curbura 4 - dimensională constantă, diferită de zero, determinată integral de valoarea nenulă a constantei cosmologice. Dacă  $\Lambda > 0$ , Universul capătă o expansiune exponențială (evident, dependentă de timpul cosmic  $t$ ) în urma căruia galaxiile, privite ca puncte materiale izolate (de probă), intră într-o așa numită "mișcare recesională" îndepărtându-se unele de altele cu o viteză relativă proporțională cu distanța geometrică  $r$  dintre ele. Această consecință (teoretică) a modelului de Univers de Sitter a fost strălucit confirmată observațional de Hubble, în 1929, în urma unor cercetări, începute încă din 1922, asupra "deplasării spre roșu" a galaxiilor foarte îndepărtate. El practic obține aceeași lege

$$v = Hr ,$$

a vitezei recesionale, stabilind și valoarea constantei  $H$  care, de atunci, îi poartă numele. Acest punct de vedere dinamic, eminent evolutiv, propus de de Sitter și amplu explicat comunității științifice (din 1928) de către Sir Arthur Eddington, a fost continuat, perfecționat și evident modificat, în ce privește contribuția efectivă a materiei prezente (totuși)



în Univers, de către Le Maitre și Friedman. Mai târziu, prin anii /30, el este adus la o "formă rotundă", de către Robertson și Walker, care stă și astăzi la baza așa numitului Model Standard (Cosmologic) al Marii Explozii Inițiale (spațio-temporale) *Big-Bang* a Universului observabil. Nu mai putem continua aici detalierea investigațiilor (științifice) în această direcție, deoarece am depășit cu mult cadrul discuției referitoare la modelul de Univers propus de Einstein. Ceea ce trebuie să reținem este faptul că, încă din primele lucrări în care a fost introdusă și exploatată (cognitiv), această constantă a produs o adevărată turnură de mentalitate în Cosmologia Relativistă, aruncând o lumină nouă asupra fizicii câmpului gravitațional, de scară (foarte) largă.

A doua tabără (de fizicieni și filozofi) susținea, în baza Principiului Economiei de Constante Fizice, că este perfect posibilă și euristic suficientă, descrierea gravitației numai prin ecuațiile Einstein cu  $\Lambda \equiv 0$ , deoarece câmpul gravitațional se cuplează, la sursele sale materiale printr-o singură constantă fundamentală, anume constanta  $G$ , a atracției universale.

În același timp, Principiul lui Mach ar fi respectat chiar în forma sa inițială deoarece, numai materia descrisă prin  $T_{ab} \neq 0$  ar contribui la inerția corpurilor de probă. Mai mult decât atât, spuneau ei, dacă am accepta prezența constantei cosmologice și aceasta ar avea o valoare negativă (deoarece semnul ei nu poate fi fixat prin raționamente riguroase, în cadrul Teoriei Relativității Generale) atunci gravitația "convențională", întotdeauna atractivă, ar fi acompaniată de un câmp cosmologic universal, eminent repulsiv, adică de antigravitație.

Raționamentul lor era simplu și a avut drept consecință scăderea, drastică, pentru câteva decenii, a interesului în studiul fizic al soluțiilor



exacte (ale ecuațiilor Einstein) cu  $\Lambda < 0$ .

Dacă eliminăm orice distribuție continuă de materie ordinară, adică cerem  $T_{ab} \equiv 0$ , atunci ecuațiile Einstein cu termen cosmologic se pot scrie simplu

$$G_{ab} = \kappa_0 \left( -g_{ab} \frac{\Lambda}{\kappa_0} \right) \quad (1.135)$$

Prin urmare, putem interpreta tot termenul cosmologic ca reprezentând o distribuție continuă de extramaterie, caracterizată de tensorul conservativ impuls - energie

$$T_{ab}[\Lambda] = -g_{ab} \frac{\Lambda}{\kappa_0} \quad (1.136)$$

Dar, după cum știm, într-un reper rigid pseudo - ortonormal, în care  $g_{ab} = \eta_{ab}$ , componenta  $T_{44}$  reprezintă densitatea volumică de energie (deci și de masă). Dacă estimăm  $T_{44}[\Lambda]$ , obținem că

$$T_{44}[\Lambda] = \frac{\Lambda}{\kappa_0} < 0, \text{ pentru } \Lambda < 0 \quad (1.137)$$

ceea ce arată că, masa acestui câmp este negativă adică, el "va fugi" din liniile câmpului gravitațional convențional (produs întotdeauna de corpuri de masă pozitivă) având deci, o comportare antigravitațională. Evident, prelungind raționamentul, rezultă că toate particulele test de masă pozitivă vor fi respinse de acest câmp universal, de masă negativă. Resuscitarea interesului în investigarea structurilor spațio - temporale cu  $\Lambda < 0$  s-a produs după vreo 50 de ani (de la introducerea termenului cosmologic) și a avut la bază două concepte noi, absolut neortodoxe pentru fizica anilor 1950 - 1970, aparent foarte diferite dar, în fapt, puternic corelate, deoarece reclamau aceeași cauză pentru producerea lor, și anume, prezența densităților negative de energie.



Primul dintre aceste concepte a fost dezvoltat (inițial) de către Kip Thorne, după o idee formulată de Sir John Archibald Wheeler, care afirma că, cel puțin teoretic, Relativitatea lui Einstein nu interzice existența unor structuri spațio - temporale cu totul speciale, sub aspectul topologiei lor, care să conecteze direct, deci pe "drumuri" foarte scurte, prin adevărate tuneluri extradimensionale (față de hiperplanul Metagalaxiei), zone (altfel) foarte îndepărtate din Univers.

Ca un exemplu, care a devenit tipic odată cu trecerea anilor, gândiți-vă că unui vierme, aflat la unul dintre polii suprafeței sferice a unui măr, îi poate fi mult mai ușor să călătorească direct spre celălalt pol, săpându-și un tunel prin măr, în lungul axei acestuia, decât să meargă prin afară, pe suprafața mărului, urmând semicercul meridian. Cum fizicienii (se pare că) au întotdeauna simțul umorului, dată fiind și "plasticitatea" exemplului, acestei structuri care alterează caracterul simplu conex al Universului i s-a dat numele de *wormhole* (adică, gaură de vierme).

Referitor la legătura cu  $\Lambda < 0$ , calculele arată că, pentru a menține deschisă și traversabilă o gaură de vierme, trebuie să injectăm în ea un tip special de materie, de densitate negativă - exact precum  $T_{44}[\Lambda < 0]$  - numită, din acest motiv, *exotică*. Din nefericire (pentru curiozitatea și "gustul de necunoscut" al oamenilor de știință), deși posibilă teoretic, tehnologia de "producere industrială" și de stabilizare a materiei exotice ne este deocamdată (aproape) complet necunoscută.

Al doilea concept, introdus prin anii 1960, este cel de *vid degenerat*. Chiar și din denumire, ne putem da seama de caracterul său neortodox, deoarece în toată Mecanica Cuantică, am învățat că starea fundamentală a unui sistem este întotdeauna nedegenerată. Cum poate fi atunci



starea de vid degenerată ? Sub aspect formal, răspunsul este simplu: *depinde ce înțelegem prin stare de vid*. Dacă ne gândim la aceasta ca la o stare cuantică în care minimul hamiltonianului sistemului, împreună cu valorile (de așteptare ale) câmpurilor sunt identic nule atunci ea, dacă există, va fi (întotdeauna) nedegenerată.

Ca un exemplu tipic, să luăm cazul câmpului scalar complex liber. Densitatea de lagrangeian este

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}^{|a} \phi_{|a} + m_0^2 \bar{\phi} \phi, \quad (1.138)$$

unde  $m_0$  reprezintă masa cuantelor (de exemplu, pionii  $\pi^\pm$ ) acestui câmp. Tensorul conservativ impuls - energie are expresia

$$T_{ab} = \bar{\phi}_{|a} \phi_{|b} + \bar{\phi}_{|b} \phi_{|a} - \eta_{ab} [\bar{\phi}^{|c} \phi_{|c} + m_0^2 \bar{\phi} \phi] \quad (1.139)$$

conducând la densitatea de hamiltonian

$$\mathcal{H} = T_{44} = 2\bar{\phi}_{|4} \phi_{|4} + [\delta^{\mu\nu} \bar{\phi}_{|\mu} \phi_{|\nu} - \bar{\phi}_{|4} \phi_{|4} + m_0^2 \bar{\phi} \phi], \quad (1.140)$$

adică

$$\mathcal{H} = \delta^{ab} \bar{\phi}_{|a} \phi_{|b} + m_0^2 \bar{\phi} \phi \quad (1.141)$$

După cum se poate observa, el este pozitiv definit și realizează minimul la  $\bar{\phi}_0 = \phi_0 \equiv 0$ , când are valoarea zero. Prin urmare, starea de vid, în sensul de mai sus, este bine definită, fiind într-adevăr, nedegenerată. Această situație este tipică tuturor câmpurilor libere, neautointeractive.

Dar ce s-ar întâmpla în cazul câmpurilor libere, autointeractive ? Să luăm, de exemplu, cazul densității de lagrangeian

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}^{|c} \phi_{|c} - \mu^2 \bar{\phi} \phi + \frac{\lambda}{2} (\bar{\phi} \phi)^2 \quad (1.142)$$



a unui scalar complex asemănător primului ( $m_0^2$  este înlocuit cu  $-\mu_0^2$ ), dar self - interactiv prin intermediul unei constante de cuplaj,  $\lambda$ . Tensorul conservativ impuls - energie va avea expresia

$$T_{ab} = \bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} + \bar{\phi}_{|b}\phi_{|a} - \eta_{ab} \left[ \bar{\phi}^c\phi_{|c} - \mu^2\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\bar{\phi}\phi)^2 \right] \quad (1.143)$$

și va conduce la densitatea de hamiltonian,  $\mathcal{H} = T_{44}$ ,

$$\mathcal{H} = \delta^{ab}\bar{\phi}_{|a}\phi_{|b} - \mu^2\bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{2}(\bar{\phi}\phi)^2 \quad (1.144)$$

Decă definim vidul acestei teorii ca fiind starea, sau (după cum vom vedea) stările, în care se realizează minimul lui  $\mathcal{H}$  atunci, din condițiile de extrem

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\phi}} = 0, \quad (1.145)$$

obținem ecuația algebrică

$$(\bar{\phi}\phi)_m = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (1.146)$$

care posedă o infinitate de rădăcini

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} e^{i\alpha} \\ \bar{\phi}_m &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (1.147)$$

cu  $\alpha \in R$ . Deci, în acest caz, vidul teoriei nu numai că este degenerat, dar ordinul degenerării sale posedă puterea continuumului. Avem, cu alte cuvinte, un sistem fizic a cărui stare de vid este continuu degenerată. Evident, spre deosebire de primul caz, modulul valorii de așteptare a câmpului în stările sale de vid este pozitiv și anume,

$$|\phi_m| = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.148)$$



Calculând acum, componentele tensorului impuls - energie al vidului degenerat găsim că

$$T_{ab} [\bar{\phi}\phi]_m = \eta_{ab} \frac{\mu^4}{2\lambda} \quad (1.149)$$

și asemănarea cu  $T_{ab}[\Lambda]$  este evidentă pentru

$$\Lambda = -\kappa_0 \frac{\mu^4}{2\lambda} < 0 \text{ (cu } \lambda > 0 \text{)}$$

Implicațiile acestui concept în fenomenul “ruperii spontane de simetrie”, în teorema Goldstone și mai ales în vestitul Mecanism Higgs, care stă la baza caracterului finit, renormabil, al tuturor teoriilor gauge contemporane, de unificare (a interacțiunilor din natură), le vom analiza, în capitolul 5, al prezentei lucrări. Acum însă, este cazul “să revenim la oile noastre”, adică la ecuațiile Einstein pentru modelul său de Univers, cu includerea efectivă a “termenului cosmologic”. Acestea au forma generală

$$G_{ab} + g_{ab}\Lambda = \kappa_0 \rho \eta_{a4} \eta_{b4}, \quad (1.150)$$

care se reduce la sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} (f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\Lambda \\ f_{|11} + (f_{|1})^2 &= -\Lambda \\ 2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} &= -\Lambda - \kappa_0 \rho \end{aligned} \quad (1.151)$$

ce diferă de forma inițială, (1.134), doar prin adăugarea termenului (cosmologic) “ $-\Lambda$ ” în membrul drept. Cum  $\Lambda$  este constant, avem, sub aspect funcțional, trei ecuații diferențiale cu numai două funcții necunoscute  $f$  și  $\rho$ . Trebuie deci verificată compatibilitatea sistemului. Înmulțind cu 2 a doua ecuație și adunând-o la prima, obținem

$$2f_{|11} + 3(f_{|1})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} = -3\Lambda \quad (1.152)$$



care trebuie să fie identică, dat fiind că au același membru stâng, cu a treia ecuație, adică, trebuie să avem egalitatea

$$\rho = 2\kappa_0^{-1}\Lambda \quad (1.153)$$

Prin urmare, în Universul Einstein, densitatea volumică de energie a prafului Cosmologic este constantă și pozitivă, adică indubitabil bine definită (în acord cu teoremele de energie formulate de Hawking și Ellis), dacă  $\Lambda$  este pozitiv. De aici și interesul fizic, de ansamblu, în modelele (cosmologice) cu constantă cosmologică pozitivă. Referitor la compatibilitatea primelor două ecuații, observăm că, dacă înmulțim a doua ecuație cu  $e^f$ , obținem ecuația diferențială liniară, de ordinul doi și omogenă

$$(e^f)_{|11} + \Lambda e^f = 0, \quad (1.154)$$

cu soluția generală

$$e^f = A \sin [\sqrt{\Lambda}r + \alpha], \quad (1.155)$$

în care  $A$  și  $\alpha$  sunt constante reale. De aici, rezultă

$$f_{|1} = \sqrt{\Lambda} \cot [\sqrt{\Lambda}r + \alpha], \quad (1.156)$$

astfel încât, înlocuind în prima ecuație, ajungem la relația

$$\left[ \frac{1}{a^2} - \Lambda \cos^2 [\sqrt{\Lambda}r + \alpha] \right] = \Lambda^2 \sin^2 [\sqrt{\Lambda}r + \alpha] \quad (1.157)$$

care poate fi satisfăcută identic (pentru a asigura compatibilitatea), pentru orice  $r \in R_+$ , dacă și numai dacă

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad (1.158)$$



În aceste condiții, modelul de Univers propus de Einstein este complet rezolvat analitic și poate fi sintetizat în metrica

$$ds^2 = (dr)^2 + \frac{1}{\Lambda} \sin^2 [\sqrt{\Lambda}r + \alpha] [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] - (dt)^2 \quad (1.159)$$

și în valoarea constantă și omogenă a densității prafului cosmologic

$$\rho = \frac{2}{\kappa_0} \Lambda \quad (1.160)$$

Cititorul mai puțin informat, dar malițios, ar putea întreba *Si pentru două rezultate sărmene, o funcție metrică armonică și o densitate constantă, au trebuit efectuate atâtea calcule și spuse atâtea povești?* Ei bine, DA! În primul rând deoarece, chiar dacă ne-am fi gândit de la început asupra unei funcții metriche armonice ca să asigurăm caracterul constant și pozitiv definit al invariantului de curbura,  $R_{(3)}$ , al spațiului, faptul că parametrul  $a$  din metrica inițială trebuie să fie egal cu  $\Lambda^{-1/2}$  nu "iese" decât din ecuațiile Einstein.

În al doilea rând, faptul că densitatea materiei cosmologice "netezite" nu poate fi decât dublul, prin  $\kappa_0$ , al constantei cosmologice,  $\Lambda$ , nu este deloc evident la prima privire. Ca să întrebăm noi acum, *de ce nu am putea "pompa" în Univers oricâtă materie vrem?* Pe baza (fie și numai a) compatibilității sistemului de ecuații ale modelului, răspunsul este clar: *fiindcă am distruge caracterul staționar al bilanțului geometrie - materie, al proceselor prin care "presiunea cosmologică",  $-\frac{\Lambda}{\kappa_0}$  și "densitatea volumică efectivă de energie",  $\rho + \frac{\Lambda}{\kappa_0}$ , contribuie la câmpul gravitațional ce închide, topologic, 3 - suprafețele spațiale de timp (universal) constant.*

În fine, în al treilea rând (ca să nu lungim, excesiv, lanțul argumentelor), fiindcă există două consecințe deosebit de importante ale



modelului, ce nu pot fi deduse decât din rezultatele exacte ale acestuia. Prima parte a prezentării lor fiind comună, le vom separa după aceea.

Să începem prin a calcula energia totală a materiei “netezite”, în Universul Einstein. Ea este dată de integrala

$$E = \int \rho \frac{1}{\Lambda} \sin^2(\sqrt{\Lambda} r) \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1.161)$$

Factorul de fază  $\alpha$  nu joacă nici un rol, de aceea l-am fixat la zero, iar pentru ca sinusul (din  $e^f$ ) să fie pozitiv, coordonata de tip radial  $r$  trebuie să ia valori în intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}\right]$ . Cum totul este independent de unghiul solid  $\Omega = \int \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi$ , rezultă pentru  $E$  expresia (după calcularea integralei)

$$E = \frac{4\pi^2}{\kappa_0} \Lambda^{-1/2} \quad (1.162)$$

care conduce la masa materiei ordinare din Universul Einstein,  $M = \frac{E}{c^2}$ ,

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{G} \Lambda^{-1/2} \quad (1.163)$$

Aici apar două consecințe:

- (i) Dat fiind că neutronii liberi nu sunt stabili, iar electronii sunt mult mai ușori decât protonii, putem considera praful cosmologic ca fiind alcătuit “sub aspectul ponderalității sale” din nuclee de hidrogen. Ca urmare, putem evalua numărul protonilor din Univers prin simpla relație  $N_p = M m_p^{-1}$ , obținând

$$N_p = \frac{\pi c^2}{2G} \frac{\Lambda^{-1/2}}{m_p} \approx 10^{80}, \quad (1.164)$$

pentru o valoare rezonabilă,  $\Lambda \approx 10^{-51} \text{ m}^{-2}$ , a constantei cosmologice. Deși pare grosier ca justificare, acest rezultat, obținut pentru prima oară (și justificat printr-o metodă independentă) de Edington, în 1921, și reconfirmat, din nou cu totul independent, de



Dicke, prin anii 1960, este utilizat și astăzi, în modele cosmologice deosebit de sofisticate, la explicarea entropiei extrem de mari a Universului nostru.

- (ii) Estimând grosier, dar în acord cu observațiile de scară largă, masa tipică a unei galaxii, la  $M_G = 10^{41} \div 10^{42}$  kg, formula de masă prezisă de modelul Einstein conduce direct la o estimare a numărului de galaxii din Univers (sau din partea observabilă a acestuia) de circa  $10^{10} \div 10^{12}$  cu o medie geometrică de

$$N_G \sim 10^{11} \text{ (galaxii)}$$

Chiar dacă asupra acestei valori “se poate discuta”, să nu uităm că ea a fost obținută acum mai bine de 70 de ani, când astronomii abia îndrăzneau să viseze la “cam câte galaxii ar fi în Univers, dacă acesta este finit, dar nelimitat, asemeni unei sfere”. Mai mult decât atât, faptul că  $r_{max} = \pi \Lambda^{-1/2}$ , după cum rezultă din soluția exactă propusă de Einstein, a dat un răspuns remarcabil la o altă întrebare, cel puțin fizic (ca să nu spunem “metafizic”) fundamentală, *cam cât de mare ar fi Universul nostru?* Cu  $\Lambda$  în intervalul rezonabil,  $10^{-52} \div 10^{-50} \text{ (m}^{-2}\text{)}$ , răspunsul lui Einstein a fost destul de clar: în jur de  $10^{26}$  m, adică de cam 10 miliarde de ani lumină.

Continuă și astăzi să fie surprinzător acest rezultat, prin simplitatea modelului din care a fost obținut, când cele mai recente date de scară foarte largă, coroborate cu cel mai modern model cosmologic, așa numitul “Univers Inflaționist”, dau o valoare de  $12 \div 13$  miliarde ani lumină....



În fine, să mai analizăm un singur aspect. Dacă am avea "puteri paranormale", astfel încât să putem "ieși" din cadrul celor patru dimensiuni spațio - temporale, pe cel puțin o extra-dimensiune, cum am "vedea" Universul Einstein ?

Pentru a răspunde, introducem coordonata

$$\chi = \sqrt{\Lambda} r \in [0, \pi] \quad (1.165)$$

care aduce metrica la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\Lambda} \left\{ (d\chi)^2 + \sin^2 \chi \left[ (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \right] \right\} - (dt)^2 \quad (1.166)$$

Cum timpul este ortogonal și plat, iar  $\Lambda^{-1}$  fixează doar pătratul scării dimensiunilor spațiale, putem să ne concentrăm asupra varietății  $3D$ , descrisă de metrica

$$ds^2 = (d\chi)^2 + \sin^2 \chi (d\theta)^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta (d\varphi)^2, \quad (1.167)$$

cu  $(\chi, \theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . Să adunăm și să scădem, în membrul drept, termenul  $\cos^2 \chi (d\chi)^2$ . Obținem

$$dl^2 = \sin^2 \chi (d\chi)^2 + (d \sin \chi)^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, \text{ cu } d\Omega^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \quad (1.168)$$

Dar, notând cu  $R = \sin \chi$  noua coordonată radială, observăm că ultimii doi termeni din dreapta reprezintă metrica spațiului euclidian  $R^3$ , în coordonate sferice:

$$(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 = (dR)^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (1.169)$$

unde, evident,

$$\begin{aligned} X &= R \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (1.170)$$



sunt coordonatele carteziene (din  $R^3$ ). Astfel, metrica  $dl^2$  se poate scrie sub forma

$$dl^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 + (dW)^2 \quad (1.171)$$

cu

$$W = \cos \chi \quad (1.172)$$

ca a patra coordonată de gen spațial, indicând clar că este vorba de scufundarea unei varietăți  $V_3$ , de coordonate locale  $(\chi, \theta, \varphi)$  într-un spațiu euclidian abstract,  $R^4$ , de coordonate (globale)  $(X, Y, Z, W)$ , prin parametrizarea

$$\begin{aligned} X &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= \sin \chi \cos \theta \\ W &= \cos \chi \end{aligned} \quad (1.173)$$

După cum se observă imediat, aceasta conduce la ecuația de definire implicită a 3 - suprafeței  $V_3$ , anume .

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 1,$$

astfel încât, este vorba de sfera tridimensională unitate  $S^3$ . Cum diferența dintre numărul dimensiunilor spațiului de scufundare și cel al dimensiunilor varietății scufundate este  $4 - 3$ , Universul Einstein are clasa de scufundare  $s = 1$ . Adăugând acum și dimensiunea de gen temporal

$$T = t \in R$$

obținem un spațiu euclidian,  $R^5$ , de semnătură  $\sigma_{(5)} = 4 - 1 = 3$  și metrică (plată)

$$ds^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 + (dW)^2 - (dT)^2 \quad (1.174)$$



în care tot Universul Einstein, de semnătură  $\sigma_{(4)} = 3 - 1 = 2$  și metrică

$$ds^2 = \Lambda^{-1} \{ (d\chi)^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \} - (dt)^2 \quad (1.175)$$

este scufundat prin parametrizarea

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sin \chi \cos \theta \\ W &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \cos \chi \\ T &= t \end{aligned} \quad (1.176)$$

având forma unui cilindru (drept), ridicat pe direcția temporală, cu secțiune transversală ( $T = \text{const}$ ) sferică tridimensională, de rază  $\Lambda^{-1/2}$ . Topologia  $S^3 \times R$  a acestui Univers este acum evidentă.

### 1.3 Geometrie $S^3 \times R$

Realizarea de extensiuni moderne ale Teoriei Relativității Generale se poate face printr-o reformulare a acesteia în termenii teoriei fibratelor. În lucrarea [6], asupra căreia nu vom insista în cadrul acestei cărți, am construit fibratul principal al modelului, cu varietatea de bază  $M = \Sigma^3 \times R$  și cu un grup structural, compact,  $n$  - dimensional. Lagrangeianul este determinat de curbura scalară a legii de derivare compatibile cu metrica pseudoriemanniană pe spațiul total al fibratului principal.



Obiectivul nostru fiind dezvoltarea unor teorii de câmp, pe varietatea  $S^3 \times R$ , în scopul geometrizarii principalelor surse materiale, este indicat să ne oprim puțin asupra geometriei acestei varietăți.

Definind sfera  $S^3$  ca în (1.53) și utilizând parametrizarea

$$\begin{aligned}x_1 &= a \cos \alpha \cos \theta \\x_2 &= a \sin \alpha \cos \theta \\x_3 &= a \cos \beta \sin \theta \\x_4 &= a \sin \beta \sin \theta\end{aligned}\tag{1.177}$$

cu

$$\begin{aligned}0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\0 &\leq \alpha, \beta \leq 2\pi\end{aligned}\tag{1.178}$$

vom ajunge la metrică

$$d\sigma^2 = a^2 [\cos^2 \theta (d\alpha)^2 + \sin^2 \theta (d\beta)^2 + (d\theta)^2]\tag{1.179}$$

Câmpurile  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , tangente la sfera  $S^3$  și definite prin (1.54), se vor scrie în baza locală  $\{\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\theta\}$ , sub forma

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{1}{a} X_1 = \frac{1}{a} [\cos(\alpha + \beta)(\tan \theta \partial_\alpha - \cot \theta \partial_\beta) - \sin(\alpha + \beta) \partial_\theta] \\e_2 &= \frac{1}{a} X_2 = \frac{1}{a} [\sin(\alpha + \beta)(\tan \theta \partial_\alpha - \cot \theta \partial_\beta) + \cos(\alpha + \beta) \partial_\theta] \\e_3 &= \frac{1}{a} X_3 = \frac{1}{a} (-\partial_\alpha - \partial_\beta)\end{aligned}\tag{1.180}$$

și satisfac algebra

$$[e_\mu, e_\nu] = \frac{2}{a} \varepsilon_{\mu\nu\rho} e_\rho, \quad \mu, \nu, \rho = \overline{1, 3}\tag{1.181}$$



Baza duală corespunzătoare acestei bazei rigide va fi

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \frac{a}{2} \cos(\alpha + \beta) \sin(2\theta)(d\alpha - d\beta) - a \sin(\alpha + \beta)d\theta \\ \omega^2 &= \frac{a}{2} \sin(\alpha + \beta) \sin(2\theta)(d\alpha - d\beta) + a \cos(\alpha + \beta)d\theta \\ \omega^3 &= -a(\cos^2 \theta d\alpha + \sin^2 \theta d\beta)\end{aligned}\quad (1.182)$$

Pentru început, să considerăm cazul static, descris de metrica lorentziană

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2 \quad (1.183)$$

și să introducem reperul tetradic  $\{e_a\}_{a=\overline{1,4}}$ , cu

$$e_4 = \partial_4 \quad (1.184)$$

și respectiv, baza duală  $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,4}}$ , cu

$$\omega^4 = dt \quad (1.185)$$

În acest caz, algebra Lie satisfăcută de vectorii bazei se poate scrie sub forma sugestivă

$$[e_b, e_c] = \frac{2}{a} \varepsilon_{4bc}^d e_d \quad (1.186)$$

unde  $\varepsilon_{4bcd}$  este tensorul antisimetric de rang 4, cu  $\varepsilon_{4123} = 1$ . Comparând această relație cu (1.5), vom identifica constantele de structură ca fiind

$$C_{bcd} = \frac{2}{a} \varepsilon_{4bcd} \quad (1.187)$$

adică, cele corespunzătoare algebrei Lie a grupului  $SU(2) \times T$ , unde  $T$  este grupul translațiilor temporale.

Definim metrica riemanniană a varietății, cu ajutorul lui (1.78), în care se înlocuiește baza locală  $\{\partial_i\}_{i=\overline{1,m}}$ , cu baza rigidă  $\{e_a\}_{a=\overline{1,4}}$  și avem

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) = \text{diag}(1, 1, 1, -1) = \eta_{ab} \quad (1.188)$$



Mai departe, simbolurile lui Christoffel se obțin din (1.93) ca fiind

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{a} g^{\rho\sigma} (\varepsilon_{\sigma\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\sigma\nu} - \varepsilon_{\nu\mu\sigma}), \quad \mu, \nu, \sigma = \overline{1,3} \quad (1.189)$$

1-formele de conexiune, definite prin (1.71), sunt

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\cdot}^1 &= -\frac{1}{a} \omega^3 \\ \Gamma_{3\cdot}^2 &= -\frac{1}{a} \omega^1 \\ \Gamma_{1\cdot}^3 &= -\frac{1}{a} \omega^2 \\ \Gamma_{\mu}^4 &= -\Gamma_{4\cdot}^{\mu} = 0, \quad \mu = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (1.190)$$

iar componentele esențiale ale tensorului Riemann, (1.88),

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{a^2} \quad (1.191)$$

ne permit să calculăm tensorul Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{22} = R_{33} = \frac{2}{a^2} \\ R_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (1.192)$$

și curbura scalară, (1.91),

$$R = \frac{6}{a^2} \quad (1.193)$$

care, pentru sfera de rază unitate, devine

$$R = 6 \quad (1.194)$$



## 1.4 Cosmologii Robertson - Walker

În continuare, vom revedea modelele cosmologice Friedman - Robertson - Walker (FRW), având curbura spațială constantă și pozitivă, în termeni de teoria grupurilor, exploatând simetria  $O(4)$  a hipersuprafețelor *spacelike*  $S^3$ , a cărei algebră Lie este  $SU(2) \times SU(2)$ .

Dinamizând metrica (1.183), vom găsi două soluții exacte, ale ecuațiilor Einstein, cea corespunzătoare unei radiații termice izotrope și cea de praf (incoherent dust), caracterizând spațiu - timpul FRW actual, cu conținut de materie barionică [7].

Vom generaliza relațiile obținute în paragraful anterior, pentru cazul în care raza  $a$  este o funcție de timp, adică

$$a = f(t) \quad (1.195)$$

Astfel, constantele de structură, (1.187), devin

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho} &= \frac{2}{f} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \\ C_{\mu\mu 4} &= -C_{\mu 4\mu} = \frac{f'}{f} \\ C_{4\mu\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.196)$$

unde cu  $'$  am marcat derivatele temporale.

Utilizând prima ecuație Cartan, în absența torsiunii, (1.115), obținem coeficienții de conexiune

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= -\frac{1}{f} \varepsilon_{\mu\nu}^{\rho} \\ \Gamma_{4\mu}^{\mu} &= \Gamma_{\mu\mu}^4 = \frac{f'}{f} \\ \Gamma_{\mu 4}^{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.197)$$



iar, din a doua ecuație Cartan (1.74), vom avea următoarele componente ale tensorului Riemann

$$\begin{aligned} R_{1212} &= R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{f^2} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \\ R_{1414} &= R_{2424} = R_{3434} = -\frac{f''}{f^2} \end{aligned} \quad (1.198)$$

care ne vor permite să calculăm tensorul Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{22} = R_{33} = \frac{2}{f^2} + \frac{f''}{f} + 2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 \\ R_{44} &= -3\frac{f''}{f} \end{aligned} \quad (1.199)$$

și curbura scalară

$$R = \eta^{ab} R_{ab} = 6 \left[ \frac{1}{f^2} + \frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \right] \quad (1.200)$$

Evident, pentru  $f(t) = a = \text{const.}$ , vom obține relațiile din paragraful anterior.

În sfârșit, componentele tensorului Einstein (1.125), au forma concretă

$$\begin{aligned} G_{\mu\mu} &= - \left[ \frac{1}{f^2} + 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \right] \\ G_{44} &= \frac{3}{f^2}(1 + f'^2) \end{aligned} \quad (1.201)$$

Considerăm, în ecuațiile Einstein

$$G_{ab} = kT_{ab},$$

tensorul impuls - energie - materie corespunzător unui fluid ideal, adică

$$T_{ab} = (w + p)u_a u_b + p\eta_{ab} \quad (1.202)$$



unde  $p$  reprezintă presiunea, iar  $w$  este densitatea de energie. Forma concretă a componentelor tensorului Einstein ne sugerează utilizarea relației bine - cunoscute  $w = 3p$ , astfel încât fluidul ideal poate fi identificat cu un câmp electromagnetic de radiație pură, aducându-l pe (1.202) la

$$T_{ab} = \frac{w}{3} (4\delta_a^4 \delta_b^4 + \eta_{ab}) \quad (1.203)$$

Cu acestea, ecuațiile Einstein capătă forma concretă

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2} + 2 \frac{f''}{f} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 &= -\frac{kw}{3} \\ \frac{3}{f^2} (1 + f'^2) &= kw \end{aligned} \quad (1.204)$$

conducând la următoarea ecuație diferențială pentru funcția  $f$

$$f''f + f'^2 + 1 = 0 \quad (1.205)$$

cu soluția generală

$$f(t) = \sqrt{a^2 - (b \pm t)^2} \quad (1.206)$$

unde  $a, b$  sunt constante de integrare. Înlocuind această soluție în (1.204), vom obține densitatea de energie corespunzătoare câmpului electromagnetic al radiației pure

$$w = \frac{3a}{k} [a^2 - (b \pm t)^2]^{-2} \quad (1.207)$$

Pentru comparație, este util să analizăm și cazul cel mai simplu, corespunzător prafului cosmologic, al cărui tensor impuls - energie

$$T_{ab} = w u_a u_b \quad (1.208)$$

obținut din expresia (1.202), pentru  $p = 0$ , posedă, în raport cu reperul comobil  $u_\mu = 0$ , o singură componentă nenulă și anume

$$T_{44} = w \quad (1.209)$$



În aceste ipoteze, pentru ecuațiile Einstein

$$\begin{aligned}\frac{1}{f^2} + 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 &= 0 \\ \frac{3}{f^2}(1 + f'^2) &= kw\end{aligned}\quad (1.210)$$

soluția generală este exprimată prin dependența transcendentă a razei sferei de timp, ca

$$t = t_0 \mp \left[ c \sqrt{\frac{f}{c} \left(1 - \frac{f}{c}\right)} + \frac{\sqrt{c}}{2} \arcsin \sqrt{1 - \frac{f}{c}} \right] \quad (1.211)$$

unde  $t_0$  și  $c$  sunt constante de integrare.

La o primă privire, relația anterioară ne furnizează două cazuri particulare, de interes.

- primul, corespunzând lui  $f \ll c$ , conduce la dependența pătratică de timp

$$f(t) = (at + b)^2, \quad a > 0 \quad (1.212)$$

- în timp cel al doilea, corespunzând lui  $f \approx c$ , ne dă o descreștere în timp a razei, adică

$$f(t) = a - b^2(t - t_0)^2 \quad (1.213)$$

De asemenea, din a doua ecuație (1.210) se obține densitatea energetică

$$w = \frac{3c}{kf^3} \quad (1.214)$$

Așa cum este de așteptat, deoarece, în ambele cazuri analizate mai sus, tensorul impuls - energie - putere satisface condiția energetică tare Hawking - Ellis, modelele FRW analizate posedă o evoluție Big - Bang.



# Bibliografie

- [1] DeWitt, B.S., 1963, în *Dynamical Theory of Groups and Fields*, 1963 Les Houches Summer School.
- [2] Gheorghiev, G., și Oproiu, V., 1977, *Geometrie Diferențială*, București: Ed. Didactică și Pedagogică.
- [3] Ianuș, S., 1983, *Geometrie Diferențială cu Aplicații în Teoria Relativității*, București: Ed. Acad. R.S.R.
- [4] Kobayashi, S., and , Nomizu, K., 1963, *Foundations of Differential Geometry*, New York: Interscience Publ.
- [5] Miron, R., și Anastasiei, M., 1987, *Fibrat Vectoriale. Spații Lagrange. Aplicații în Teoria Relativității*, București: Ed. Acad. R.S.R.
- [6] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* 52, 14.
- [7] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1995, *Rom. Astron. J.* 5, 55.



# Cuprins

## 2 GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A CAMPULUI SCALAR COMPLEX 63

2.1 Teoria  $SO(3,1) \times U(1)$  - gauge invariantă a scalarului complex în Universul Einstein . . . . . 63

2.1.1 Stările de vid electromagnetic. Masa câmpului scalar complex . . . . . 67

2.2 Cuantificarea câmpului scalar complex pe varietăți spațio-temporale cu timp ortogonal și 3 - suprafețe compacte . 73

2.3 Procedeul de cuantificare pe  $S^3 \times R$  . . . . . 80



## Capitolul 2

# GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A CAMPULUI SCALAR COMPLEX

### 2.1 Teoria $SO(3, 1) \times U(1)$ - gauge invariantă a scalarului complex în Universul Einstein

În acest paragraf, vom introduce integrala acțiunii pentru sistemul fizic  $U(1)$  - gauge invariant, cu sursă materială de tip scalar complex, în prezența gravitației. Aplicând principiul acțiunii staționare, este obținut setul complet de ecuații Klein - Gordon - Maxwell - Einstein pe varietatea  $S^3 \times R$ , care va fi apoi integrat în cazul modurilor longitudinale ale câmpului electromagnetic [1].

Pentru o varietate spațio-temporală curbă  $M$ , pe care s-a definit un câmp scalar complex  $\phi$ , funcționala  $U(1)$  - gauge invariantă a acțiunii,



pentru sistemul considerat, are expresia binecunoscută [2] :

$$S = \int \mathcal{L}_{(g)} d\Omega + \int \mathcal{L}_{(m)} d\Omega + \int \mathcal{L}_{(em)} d\Omega \quad (2.1)$$

cu

$$d\Omega = -\sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \quad (2.2)$$

Densitățile de lagrangeieni corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{L}_{(g)} &= -\frac{1}{2\kappa_0}(R - 2\Lambda) \\ b) \quad \mathcal{L}_{(m)} &= g^{\mu\nu} \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi + m_0^2 \overline{\phi} \phi \\ c) \quad \mathcal{L}_{(em)} &= \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.3)$$

unde  $\kappa_0 = 8\pi$  este constanta lui Einstein exprimată în unități naturale,  $\Lambda$  este constanta cosmologică, iar  $D_\mu$  este derivata covariantă pentru grupul gauge  $U(1)$ , adică

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu \quad (2.4)$$

Cu  $\nabla_\mu$  s-a notat derivata covariantă uzuală Levi-Civita

$$\nabla_\mu U_{\gamma\cdots\rho}^{\alpha\cdots\beta} \equiv U_{\gamma\cdots\rho;\mu}^{\alpha\cdots\beta} = \quad (2.5)$$

$$= e_\mu U_{\gamma\cdots\rho}^{\alpha\cdots\beta} + U_{\gamma\cdots\rho}^{\nu\cdots\beta} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \cdots U_{\gamma\cdots\rho}^{\alpha\cdots\nu} \Gamma_{\nu\mu}^\beta - U_{\nu\cdots\rho}^{\alpha\cdots\beta} \Gamma_{\gamma\mu}^\nu - \cdots U_{\gamma\cdots\nu}^{\alpha\cdots\beta} \Gamma_{\rho\mu}^\nu$$

Asupra componentelor  $F_{\mu\nu}$  ale câmpului electromagnetic vom insista în capitolul următor, dedicat studiul acestuia.

Se aplică principiul minimei acțiuni, în raport cu câmpurile  $\phi$ ,  $\overline{\phi}$ ,  $A^\mu$ ,  $g_{\mu\nu}$ , considerate ca variabile canonice independente. Astfel, din

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{\phi}} S &= 0 \\ \delta_{\phi} S &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$



se obțin ecuațiile Klein-Gordon:

$$a) \quad D_\mu(D^\mu\phi) - m_0^2\phi = 0$$

$$b) \quad \overline{D_\mu(D^\mu\phi)} - m_0^2\bar{\phi} = 0 \quad (2.7)$$

care, după explicitarea derivatei covariante (2.4), devin

$$a) \quad g^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu} - (m_0^2 + e^2 A^\mu A_\mu)\phi = 2ieA^\mu e_\mu\phi$$

$$b) \quad g^{\mu\nu}\bar{\phi}_{;\mu\nu} - (m_0^2 + e^2 A^\mu A_\mu)\bar{\phi} = -2ieA^\mu e_\mu\bar{\phi} \quad (2.8)$$

Din

$$\delta_A S = 0 \quad (2.9)$$

se obțin ecuații Maxwell cu surse scalare

$$\nabla_\nu F_\mu^\nu = -ie[\bar{\phi}(D_\mu\phi) - (\overline{D_\mu\phi})\phi] \quad (2.10)$$

care se scriu, explicit, sub forma

$$\nabla_\nu F_\mu^\nu = -ie[\bar{\phi}(e_\mu\phi) - (e_\mu\bar{\phi})\phi] - 2e^2 A_\mu \bar{\phi}\phi \quad (2.11)$$

În sfârșit,

$$\delta_g S = 0 \quad (2.12)$$

ne furnizează ecuațiile Einstein cu constantă cosmologică

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa_0 T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

unde, tensorul energie-impuls [n.b.]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g} (\mathcal{L}_{(m)} + \mathcal{L}_{(em)})] \quad (2.14)$$



are forma explicită

$$T_{\mu\nu} = (\overline{D_\mu\phi})(D_\nu\phi) + (\overline{D_\nu\phi})(D_\mu\phi) - g_{\mu\nu}(\overline{D^\sigma\phi}D_\sigma\phi + m_0^2\overline{\phi}\phi) + F_\mu^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\gamma}F_{\rho\gamma} \quad (2.15)$$

Rezultatele prezentate mai sus, obținute pentru o varietate spațio-temporală curbă  $(M, g)$ , vor fi în continuare particularizate, utilizând relațiile introduse în capitolul I, la cazul varietății spațio-temporale  $S^3 \times R$ . Astfel,

• ecuațiile (2.8) devin:

$$\begin{aligned} a) \quad \Delta\phi - \partial_t^2\phi - (m_0^2 + e^2 A^\mu A_\mu)\phi &= 2ieA^\mu e_\mu\phi \\ b) \quad \Delta\overline{\phi} - \partial_t^2\overline{\phi} - (m_0^2 + e^2 A^\mu A_\mu)\overline{\phi} &= -2ieA^\mu e_\mu\overline{\phi} \end{aligned} \quad (2.16)$$

• ecuațiile Maxwell cu surse scalare (2.11) capătă forma

$$\begin{aligned} a) \quad e_j F_{ij} - e_4 F_{i4} - \varepsilon_{ijk} F^{jk} &= -ie(\overline{\phi} e_i\phi - e_i\overline{\phi}\phi) - 2e^2 A_i\overline{\phi}\phi \\ b) \quad e_i F_{4i} &= -ie(\overline{\phi} e_4\phi - e_4\overline{\phi}\phi) - 2e^2 A_4\overline{\phi}\phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

unde, tensorul câmpului electromagnetic  $F_{\mu\nu}$  are componentele [3,4,5]

$$\begin{aligned} F_{ij} &= e_i A_j - e_j A_i - 2\varepsilon_{ijk} A^k \\ F_{i4} &= e_i A_4 - e_4 A_i \end{aligned} \quad (2.18)$$



- iar ecuațiile Einstein cu constantă cosmologică sunt:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{a^2} + \Lambda &= \kappa_0 [2\overline{D_1\phi} D_1\phi - (\overline{D^\mu\phi} D_\mu\phi + m_0^2\overline{\phi\phi})] + \\
 &\quad + F_1^\mu F_{1\mu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 -\frac{1}{a^2} + \Lambda &= \kappa_0 [2\overline{D_2\phi} D_2\phi - (\overline{D^\mu\phi} D_\mu\phi + m_0^2\overline{\phi\phi})] + \\
 &\quad + F_2^\mu F_{2\mu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 -\frac{1}{a^2} + \Lambda &= \kappa_0 [2\overline{D_3\phi} D_3\phi - (\overline{D^\mu\phi} D_\mu\phi + m_0^2\overline{\phi\phi})] + \\
 &\quad + F_3^\mu F_{3\mu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 \frac{3}{a^2} - \Lambda &= \kappa_0 [2\overline{D_4\phi} D_4\phi + (\overline{D^\mu\phi} D_\mu\phi + m_0^2\overline{\phi\phi})] + \\
 &\quad + F_4^\mu F_{4\mu} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
 0 &= \overline{D_i\phi} D_j\phi + \overline{D_j\phi} D_i\phi + F_i^\mu F_{j\mu} \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j \\
 0 &= \overline{D_i\phi} D_4\phi + \overline{D_4\phi} D_i\phi + F_i^\mu F_{4\mu} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Sistemul (2.16 - 19), ce descrie dinamica sistemului fizic, reprezintă setul de ecuații Klein - Gordon - Maxwell - Einstein, de a cărui integrare, pentru cazul modurilor longitudinale ale câmpului vectorial, ne vom ocupa în cele ce urmează.

### 2.1.1 Stările de vid electromagnetic. Masa câmpului scalar complex

Datorită curburii varietății spațio-temporale, spectrul modurilor transversale și longitudinale este diferit [6].



Pentru modurile longitudinale, ce permit o caracterizare netrivială a stărilor de vid electromagnetic, sunt valabile relațiile:

$$\begin{aligned} a) \quad F_{ij} &= c_i A_j - c_j A_i - 2\varepsilon_{ijk} A^k = 0 \\ b) \quad F_{i4} &= c_i A_4 - c_4 A_i = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

care, înlocuite în ecuațiile Maxwell cu surse scalare (2.17.a,b), ne conduc la componentele potențialului  $A_\mu$  de forma

$$\begin{aligned} a) \quad A_i &= -\frac{i}{2e}(\bar{\phi}\phi)^{-1}(\bar{\phi}(e_i\phi) - (e_i\bar{\phi})\phi) \\ b) \quad A_4 &= -\frac{i}{2e}(\bar{\phi}\phi)^{-1}(\bar{\phi}(e_4\phi) - (e_4\bar{\phi})\phi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Considerând acum câmpul scalar complex  $\phi$  descris de funcțiile reale  $F$  și  $G$

$$\begin{aligned} a) \quad \phi &= F \exp(iG) \\ b) \quad \bar{\phi} &= F \exp(-iG), \end{aligned} \quad (2.22)$$

adică componentele lui  $A_\mu$  de forma

$$\begin{aligned} a) \quad A_i &= \frac{1}{e}c_i G \\ b) \quad A_4 &= \frac{1}{e}c_4 G, \end{aligned} \quad (2.23)$$

se obțin, prin înlocuire în ecuațiile Klein-Gordon (2.16.a,b), următoarele ecuații de câmp pentru funcțiile reale  $F$  și  $G$ :

$$\begin{aligned} a) \quad \Delta F - \partial_t^2 F - m_0^2 F &= 0 \\ b) \quad \Delta G - \partial_t^2 G &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

unde s-a notat cu  $\Delta$  laplaceianul pe varietatea  $S^3$ , adică

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \cot(2\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (2.25)$$



În sfârșit, sistemul de ecuații Einstein (2.19) devine:

$$\begin{aligned} a) \quad & -\frac{1}{a^2} + \Lambda = \kappa_0 [2 e_i F c_i F - (e_\mu F e^\mu F + m_0^2 F^2)] \\ b) \quad & \frac{3}{a^2} + \Lambda = \kappa_0 [2 e_i F e_i F + (e_4 F)^2 + m_0^2 F^2] \\ c) \quad & e_i F e_j F = 0 \\ d) \quad & e_i F e_4 F = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

unde nu se sumează după  $i = 1, 2, 3$ . Ecuațiile (2.26.c,d) implică restricțiile

$$e_i F = 0 ; i = 1, 2, 3 \quad (2.27)$$

Deci, sistemul final pentru funcțiile necunoscute  $F$  și  $G$  va fi

$$\begin{aligned} a) \quad & \partial_t^2 F + m_0^2 F = 0 \\ b) \quad & \Delta G - \partial_t^2 G = 0 \\ c) \quad & (\partial_t F)^2 - m_0^2 F^2 = -\frac{1}{\kappa_0} \left( \frac{1}{a^2} - \Lambda \right) \\ d) \quad & (\partial_t F)^2 + m_0^2 F^2 = \frac{1}{\kappa_0} \left( \frac{3}{a^2} - \Lambda \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Soluția pentru  $G$  de forma

$$G = \mathcal{G}(\theta) + \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta) + \mathcal{T}(t) \quad (2.29)$$

pentru care modul longitudinal fundamental al lui  $A_\mu$  este obținut prin înlocuirea laplaceianului (2.25) în (2.28.b) și impunând

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{G}}{d\theta^2} + 2 \cot(2\theta) \frac{d\mathcal{G}}{d\theta} &= 0 \\ \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \mathcal{B}}{d\beta^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \mathcal{T}}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$



capătă expresia

$$G = \frac{k}{2} \ln(\tan \theta) + n_1 \alpha + n_2 \beta - Et, \quad (2.31)$$

unde  $k, E \in \mathbb{R}$  și  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ .

În continuare, vom calcula fluxul magnetic folosind o curbă închisă, cu punctul de plecare  $(\theta_0, \alpha_0, \beta_0)$  și cu punctul final  $(\theta_0, \alpha_0 + 2\pi, \beta_0 + 2\pi)$ , cu ajutorul relației uzuale

$$\varphi = \oint A_i \omega^i \quad (2.32)$$

și vom obține

$$\varphi = \frac{1}{e} [G(\theta_0, \alpha_0 + 2\pi, \beta_0 + 2\pi, t) - G(\theta_0, \alpha_0, \beta_0, t)] \quad (2.33)$$

care ne va conduce la următoarea cuantificare geometrică, naturală, a fluxului magnetic, pe spațiu-timpul  $S^3 \times \mathbb{R}$

$$\varphi = \frac{2\pi}{e} (n_1 + n_2) \quad (2.34)$$

În sistemul (2.28), ecuația (2.28.a) admite soluția

$$F = F_0 \sin(m_0 t + \xi_0) \quad (2.35)$$

care reduce ecuațiile (2.28.c,d) la forma concretă

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{1}{a^2} - \Lambda &= -\kappa_0 m_0^2 F_0^2 \cos(2m_0 t + 2\xi_0) \\ b) \quad \frac{3}{a^2} - \Lambda &= \kappa_0 m_0^2 F_0^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Așa cum era de așteptat, deoarece s-a lucrat în cazul static, ecuațiile Einstein nu admit o soluție exactă. Componentele  $T_{ii}$  și  $T_{44}$  exprimând fenomenologic contribuția efectivă a câmpului scalar complex, se poate



aplica o mediere în timp, în mod similar celei pentru măsurătorile în curent alternativ, adică

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad T = 2\pi/m_0 \quad (2.37)$$

Aplicând această procedură lui (2.36.a), vom obține o interpretare geometrică a constantei cosmologice, aceasta fiind legată de raza sferei prin relația

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} \quad (2.38)$$

În aceste condiții, ecuația (2.36.b) furnizează expresia amplitudinii câmpului scalar complex

$$F_0 = \pm \frac{\sqrt{2/\kappa_0}}{am_0} \quad (2.39)$$

Aplicând acum relația de mediere în calculul sarcinii electrice a cuantei câmpului scalar

$$\frac{m_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/m_0} \int_{(S^3)} j_4 dS_4 dt = e \quad (2.40)$$

unde

$$dS_4 = \frac{a^3}{4\pi^2} \sin(2\theta) d\theta d\alpha d\beta \quad (2.41)$$

iar componenta a patra a densității de curent

$$j_4 = ie(\bar{\phi}(e_4\phi)) - ((e_4\bar{\phi})\phi) \quad (2.42)$$

fiind, din (2.22.a,b), (2.31) și (2.35), de forma

$$j_4 = 2eEF_0^2 \sin(m_0t + \xi_0) \quad (2.43)$$

obținem, după efectuarea integralelor din (2.40), următoarea relație importantă pentru energia modului considerat,

$$E = \frac{\kappa_0 m_0^2}{2a} \quad (2.44)$$



Expresia funcției de undă  $\phi(\alpha, \beta, t)$ , în cazul  $k = 0$ , adică

$$\phi(\alpha, \beta, t) = \frac{\sqrt{2/\kappa_0}}{m_0 a} \exp(i(n_1 \alpha + n_2 \beta)) \exp(-i \frac{\kappa_0 m_0^2}{2a} t) \sin(m_0 t + \xi_0) \quad (2.45)$$

mediată în timp

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{2/\kappa_0} \frac{\exp(i(n_1 \alpha + n_2 \beta))}{2\pi m_0 a} \frac{1 - \exp(-i\pi \kappa_0 m_0 / a)}{1 - (\kappa_0 m_0 / (2a))^2} \quad (2.46)$$

este diferită de zero, punând în evidență o valoare specială a masei induse de câmpul gravitațional static corespunzător lui  $S^3 \times R$ , pentru modul longitudinal fundamental al potențialului vector  $A_\mu$ , de forma

$$m_0 = \frac{2a}{\kappa_0} \quad (2.47)$$

Trecând la limită în (2.46), vom obține deci

$$\langle \phi \rangle|_{m_0=2a/\kappa_0} = -i \frac{\sqrt{\kappa_0/8}}{a^2} \exp(i(n_1 \alpha + n_2 \beta)) \quad (2.48)$$

Se observă că energia totală a sistemului considerat, calculată în mod uzual ca

$$H = \int_{S^3} T_{44} dS_4, \quad (2.49)$$

unde  $dS_4$  este dat de (2.41), iar  $T_{44}$  din (2.15) este

$$T_{44} = e_4 F e_4 F + m_0^2 F^2 = 2m_0^2 F_0^2, \quad (2.50)$$

are expresia

$$E = H = \int_{S^3} T_{44} dS_4 = \frac{2a}{\kappa_0} \quad (2.51)$$

care coincide cu masa  $m_0$  evidențiată mai sus.



## 2.2 Cuantificarea câmpului scalar complex pe varietăți spațio - temporale cu timp ortogonal și 3 - suprafețe compacte

Spre deosebire de cazul cuantificării câmpurilor în universul Minkowski, dezvoltarea completă a teoriei cuantice a câmpurilor materiale, surse ale câmpului gravitațional, pe varietăți spațio-temporale cu structură generală, este încă departe de o formă definitivă, reprezentând, în continuare, un deziderat științific [7,8]. Principala dificultate în calea unei generalizări naturale, pornind de la teoria cuantică pe background minkowskian, provine din caracterul semiclasic al Teoriei Relativității Generale. Aceasta descrie necuantic câmpul gravitațional prin intermediul componentelor canonice ale tensorului metric fundamental, exprimate în sistemul hărților locale compatibile care formează atlasul maximal al varietății spațio-temporale considerate. Din această cauză, care reflectă caracterul fizic universal al interacțiunii gravitaționale, orice câmp material încetează de a mai fi efectiv liber, aflându-se într-un cuplaj minimal -  $V_4$  (în acord cu conexiunea Levi - Civita) cu câmpul gravitațional einsteinian, considerat ca un câmp exterior de tip clasic. Imposibilitatea eliminării globale a câmpului gravitațional, prin definirea adecvată a claselor reperelor olonome global echivalente, în raport cu care ecuațiile de mișcare ale câmpului material au formă minkowskiană, induce imposibilitatea reprezentării integrale, de tip Fourier, a operatorilor de câmp  $\bar{\phi}(x), \phi$  ca soluții fundamentale ale ecuațiilor Euler - Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}_{,\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\phi}} \quad (2.52)$$



$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (2.53)$$

în spațiu - timpul  $(M, g)$  de tip  $V_4$ . Se obține drept consecință directă invalidarea funcțiilor cauzale minkowskienne  $D^{(c)}(\bar{x}, x)$  drept propagatori ai câmpului material *liber*.

Din multitudinea de modele spațio - temporale, aparținând diverselor clase de soluții exacte ale ecuațiilor Einstein, modelele statice, cu direcție temporală plată și hypersuprafață de gen spațial,  $\Sigma^3$ , ortogonală și compactă, permit elaborarea unei metode unitare, cu un înalt caracter de generalitate, pentru cuantificarea câmpurilor materiale, bazată în special pe reprezentarea operatorilor de câmp,  $\phi$  și  $\bar{\phi}$ , sub forma unor dezvoltări seriale după setul complet și ortogonal al funcțiilor proprii  $\{\Lambda_{\bar{n}}(\bar{x})\}$  ale operatorului Laplace - Beltrami  $\Delta$  definit pe subvarietatea spațială  $\Sigma^3$  [9].

Fie spațiu - timpul  $(\Sigma^3 \times R, g)$ , înzestrat cu metrica statică, de direcție temporală plată.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j - (dt)^2; \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (2.54)$$

structura geometrică background în care evoluează câmpul Klein - Gordon  $\phi(x)$ , descris prin funcționala acțiune relativist  $V_4$  - invariantă

$$S[\bar{\phi}, \phi] = \int \mathcal{L}[\bar{\phi}, \phi] d\Omega; \quad d\Omega = -\sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt, \quad (2.55)$$

cu densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L} = g^{ij} \bar{\phi}_{,i} \phi_{,j} - \bar{\phi}_{,t} \phi_{,t} + m_0^2 \bar{\phi} \phi \quad (2.56)$$



și tensorul conservativ impuls - energie - materie

$$\begin{aligned} a) \quad T_{ij} &= \bar{\phi}_{,i} \phi_{,j} + \bar{\phi}_{,j} \phi_{,i} - g_{ij} [g^{ks} \bar{\phi}_{,k} \bar{\phi}_{,s} - \bar{\phi}_{,t} \phi_{,t} + m_0^2 \bar{\phi} \phi] \\ b) \quad T_{i4} &= \bar{\phi}_{,i} \phi_{,4} + \bar{\phi}_{,4} \phi_{,i} \\ c) \quad T_{44} &= g^{ks} \bar{\phi}_{,k} \phi_{,s} + \bar{\phi}_{,t} \phi_{,t} + m_0^2 \bar{\phi} \phi \end{aligned} \quad (2.57)$$

Aplicarea principiului Hamilton de staționaritate a funcționalei acțiune  $S[\bar{\phi}, \phi]$  conduce la ecuațiile Klein - Gordon pe  $(\Sigma^3 \times R, g)$  :

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{-g} g^{ij} \phi_{,j}] - \phi_{,tt} - m_0^2 \phi &= 0 \\ b) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{-g} g^{ij} \bar{\phi}_{,j}] - \bar{\phi}_{,tt} - m_0^2 \bar{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

adică

$$\Delta \phi - \phi_{,tt} - m_0^2 \phi = 0$$

$$\Delta \bar{\phi} - \bar{\phi}_{,tt} - m_0^2 \bar{\phi} = 0 \quad (2.59)$$

unde  $\Delta$  reprezintă operatorul Laplace - Beltrami

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}] \quad (2.60)$$

definit pe subvarietatea de gen spațial  $\Sigma^3$ . Utilizând pentru integrarea ecuațiilor Klein - Gordon pe  $\Sigma^3 \times R, g)$  metoda Fourier de separare a variabilelor

$$\phi(x^\mu) = \Lambda(x^i) T(t)$$

$$\bar{\phi}(x^\mu) = \bar{\Lambda}(x^i) \bar{T}(t) \quad (2.61)$$



rezultă, pentru operatorii de câmp  $\phi(x)$  și  $\bar{\phi}(x)$ , următoarele expresii

$$\begin{aligned} a) \quad \phi(x) &= \sum_{\vec{n}} \left[ \frac{a_+(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + \frac{a_-(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}}t) \right] \Lambda_{\vec{n}}(x^i) \\ b) \quad \bar{\phi}(x) &= \sum_{\vec{n}} \left[ \frac{b_+(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + \frac{b_-(\vec{n})}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}}t) \right] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \end{aligned} \quad (2.62)$$

în care

$$\begin{aligned} b_+(\vec{n}) &= \bar{a}_-(\vec{n}) \\ b_-(\vec{n}) &= \bar{a}_+(\vec{n}) \\ V &= \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ \omega_{\vec{n}} &= \sqrt{\lambda_{\vec{n}}^2 + m_0^2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

iar  $\{\lambda_{\vec{n}}^2, \Lambda_{\vec{n}}(x^i)\}$  reprezintă setul complet de valori și funcții proprii ortonormale corespunzătoare descompunerii spectrale Laplace - Beltrami -  $\Sigma^3$

$$\begin{aligned} a) \quad \Delta \Lambda_{\vec{n}}(x^i) + \lambda_{\vec{n}}^2 \Lambda_{\vec{n}}(x^i) &= 0 \\ b) \quad \int_{\Sigma^3} \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^i) \sqrt{-g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= \delta(\vec{n} - \vec{m}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dezvoltarea metodei de cuantificare canonică a câmpului Klein - Gordon pe  $(\Sigma^3 \times R, g)$  are la bază următoarele relații de comutare, la  $t$  fixat

$$\begin{aligned} a) \quad [\phi_{,t}(\bar{x}^i, t), \phi(x^j, t)] &= i\delta(\bar{x}^k - x^k) \\ b) \quad [\phi_{,t}(\bar{x}^i, t), \bar{\phi}(x^j, t)] &= i\delta(\bar{x}^k - x^k) \end{aligned} \quad (2.65)$$

pe care trebuie să le satisfacă operatorii de câmp  $\bar{\phi}(x^i, t)$ ,  $\phi(x^j, t)$ .



Să analiză acum relația de cuantificare (2.65.a). Utilizând expresiile (2.62), avem

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} [b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)] \\ & [a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t)] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\vec{x}^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^j) - \\ & - \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} [a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t)] \\ & [b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\vec{x}^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^j) = i\delta(\vec{x}^k - x^k) \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la următoarele relații de comutare satisfăcute de operatorii de creare și anihilare  $(b_+, a_-)$  și  $(a_+, b_-)$ :

$$\begin{aligned} a) \quad & [b_+(\vec{n}), a_-(\vec{m})] = \delta(\vec{n} - \vec{m}) \\ b) \quad & [b_-(\vec{n}), a_+(\vec{m})] = -\delta(\vec{n} - \vec{m}) \\ c) \quad & [b_+(\vec{n}), a_+(\vec{m})] = [b_-(\vec{n}), a_-(\vec{m})] = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

și la următoarele relații de completitudine de tip Plancherel -  $\Sigma^3$ :

$$\sum_{\vec{n}} \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\vec{x}^i) \Lambda_{\vec{n}}(x^j) = \delta(\vec{x}^k - x^k) \quad (2.67)$$

Relația de cuantificare (2.65.b) conduce, datorită caracterului antisimetric al comutatorului și al caracterului par al funcționalei Dirac, la aceleași relații de comutare (2.66) și la aceeași relație (2.67) de completitudine a funcțiilor proprii ortonormale  $\Lambda_{\vec{n}}(x^i)$ .

În continuare, considerăm operatorii de câmp  $\phi(x)$ ,  $\bar{\phi}(x)$ . Utilizând relațiile de descompunere în frecvențe pozitive și negative

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_+(x) + \phi_-(x) \\ \bar{\phi}(x) &= \bar{\phi}_+(x) + \bar{\phi}_-(x) \end{aligned} \quad (2.68)$$



se definește produsul normal al celor doi operatori sub forma obișnuită

$$N[\bar{\phi}(\bar{x})] = \bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_+(x) + \bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_-(x) + \phi_+(x)\bar{\phi}_-(\bar{x}) + \bar{\phi}_-(\bar{x})\phi_-(x) \quad (2.69)$$

care corespunde acțiunii la dreapta, întâi a operatorului de anihilare și apoi a celui de creare. Evident, din cauza relațiilor de comutare (2.66.c), în cazurile  $\bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_+(x)$  și  $\bar{\phi}_-(\bar{x})\phi_-(x)$ , ordinea de acțiune este indiferentă.

Definind, în baza invarianței globale  $U(1)$  a densității de lagrangeian (2.56), componentele 4-vectorului densitate de curent electric

$$j^\mu = ieg^{\mu\nu} [\bar{\phi}\phi_{,\nu} - \bar{\phi}_{,\nu}\phi] \quad (2.70)$$

adică

$$\begin{aligned} a) \quad j^i &= ieg^{ij} [\bar{\phi}\phi_{,j} - \bar{\phi}_{,j}\phi] \\ b) \quad j^4 &= -ie[\bar{\phi}\phi_{,t} - \bar{\phi}_{,t}\phi] \end{aligned} \quad (2.71)$$

se poate exprima operatorul de sarcină  $Q$  a câmpului Klein - Gordon, în spațiu - timpul  $\Sigma^3 \times R$ , prin relația

$$Q = \int_{\Sigma^3} N[j^4] dS_4 = \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g}(-ie) N[\bar{\phi}\phi_{,t} - \bar{\phi}_{,t}\phi] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (2.72)$$

ceea ce revine la

$$\begin{aligned} Q &= e \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{m}}}{\omega_{\vec{n}}}} N[(b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ &\quad (a_+(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t) - a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\ &\quad - e \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} N[(b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ &\quad (a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$



se definește produsul normal al celor doi operatori sub forma obișnuită

$$N[\bar{\phi}(\bar{x})] = \bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_+(x) + \bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_-(x) + \phi_+(x)\bar{\phi}_-(\bar{x}) + \bar{\phi}_-(\bar{x})\phi_-(x) \quad (2.69)$$

care corespunde acțiunii la dreapta, întâi a operatorului de anihilare și apoi a celui de creare. Evident, din cauza relațiilor de comutare (2.66.c), în cazurile  $\bar{\phi}_+(\bar{x})\phi_+(x)$  și  $\bar{\phi}_-(\bar{x})\phi_-(x)$ , ordinea de acțiune este indiferentă.

Definind, în baza invarianței globale  $U(1)$  a densității de lagrangeian (2.56), componentele 4-vectorului densitate de curent electric

$$j^\mu = ieg^{\mu\nu} [\bar{\phi}\phi_{,\nu} - \bar{\phi}_{,\nu}\phi] \quad (2.70)$$

adică

$$\begin{aligned} a) \quad j^i &= ieg^{ij} [\bar{\phi}\phi_{,j} - \bar{\phi}_{,j}\phi] \\ b) \quad j^4 &= -ie[\bar{\phi}\phi_{,t} - \bar{\phi}_{,t}\phi] \end{aligned} \quad (2.71)$$

se poate exprima operatorul de sarcină  $Q$  a câmpului Klein - Gordon, în spațiu - timpul  $\Sigma^3 \times R$ , prin relația

$$Q = \int_{\Sigma^3} N[j^4] dS_4 = \int_{\Sigma^3} \sqrt{-g}(-ie) N[\bar{\phi}\phi_{,t} - \bar{\phi}_{,t}\phi] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (2.72)$$

ceea ce revine la

$$\begin{aligned} Q &= e \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{m}}}{\omega_{\vec{n}}}} N[(b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ & (a_+(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t) - a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\ & - e \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \int_{\Sigma^3} \frac{\sqrt{-g}}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{n}}}{\omega_{\vec{m}}}} N[(b_+(\vec{n}) \exp(i\omega_{\vec{n}}t) - b_-(\vec{n}) \exp(-i\omega_{\vec{n}}t)) \\ & (a_+(\vec{m}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t) + a_-(\vec{m}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t))] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(x^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$



adică

$$Q = c \sum_{\vec{n}} [a_+(\vec{n})b_-(\vec{n}) - b_+(\vec{n})a_-(\vec{n})] \quad (2.73)$$

expresie ce evidențiază natural operatorul număr de particule  $N_{\vec{n}}^{(+)}$

$$N_{\vec{n}}^{(+)} = a_+(\vec{n})b_-(\vec{n}) \quad (2.74)$$

și operatorul număr de antiparticule  $N_{\vec{n}}^{(-)}$

$$N_{\vec{n}}^{(-)} = b_+(\vec{n})a_-(\vec{n}) \quad (2.75)$$

Pentru a determina forma completă a propagatorului câmpului scalar - complex de masă nenulă, în cazul cuantificării în spațiu - timp  $(\Sigma^3 \times R, g)$ , se pleacă de la expresia cunoscută a produsului cronologic al operatorilor de câmp  $\bar{\phi}(\bar{x}), \phi(x)$ , adică

$$T[\bar{\phi}(\bar{x})\phi(x)] = \quad (2.76)$$

$$N[\bar{\phi}(\bar{x})\phi(x)] + \hat{\theta}(\bar{t} - t)[\bar{\phi}_-(\bar{x}), \phi_+(x)] - \hat{\theta}(t - \bar{t})[\bar{\phi}_+(\bar{x}), \phi_-(x)]$$

în care se calculează cei doi comutatori, ținând seama de relațiile (2.68), (2.62) și (2.66)

$$\begin{aligned} [\bar{\phi}_-(\bar{x}), \phi_+(x)] &= \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \frac{\exp(-i\omega_{\vec{n}}\bar{t}) \exp(i\omega_{\vec{m}}t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{m}}\omega_{\vec{n}}}} \\ &\quad [b_-(\vec{n}), a_+(\vec{m})] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^j) = \\ &= - \sum_{\vec{n}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}(\bar{t} - t))}{2\omega_{\vec{n}}} \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{n}}(x^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{\phi}_+(\bar{x}), \phi_-(x)] &= \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}\bar{t}) \exp(-i\omega_{\vec{m}}t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{m}}\omega_{\vec{n}}}} \\ &\quad [b_+(\vec{n}), a_-(\vec{m})] \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{m}}(x^j) = \\ &= \sum_{\vec{n}} \frac{\exp(i\omega_{\vec{n}}(t - \bar{t}))}{2\omega_{\vec{n}}} \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{n}}(x^j) \end{aligned}$$



Obținem astfel pentru relația (2.76) expresia

$$T[\bar{\phi}(\bar{x}) \phi(x)] = N[\bar{\phi}(\bar{x}) \phi(x)] - \quad (2.77)$$

$$\sum_{\vec{n}} \frac{\hat{\theta}(\bar{t} - t) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(\bar{t} - t)] + \hat{\theta}(t - \bar{t}) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t - \bar{t})]}{2\omega_{\vec{n}}} \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{n}}(x^j)$$

din care rezultă funcția Green cauzală  $D_{m_0}^{(c)}(\bar{x}, x)$  (propagatorul câmpului scalar complex cu masă nenulă pe  $\Sigma^3 \times R$ ) ca *valoare medie de așteptare pe starea de vid*

$$\begin{aligned} D_{m_0}^{(c)}(\bar{x}, x) &= \langle 0 | T[\bar{\phi}(\bar{x}) \phi(x)] | 0 \rangle = \\ &= - \sum_{\vec{n}} \frac{\hat{\theta}(\bar{t} - t) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(\bar{t} - t)] + \hat{\theta}(t - \bar{t}) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t - \bar{t})]}{2\omega_{\vec{n}}} \\ &\quad \bar{\Lambda}_{\vec{n}}(\bar{x}^i) \Lambda_{\vec{n}}(x^j) \end{aligned} \quad (2.78)$$

## 2.3 Procedeu de cuantificare pe $S^3 \times R$

În cele ce urmează, rezultatele obținute în acest paragraf vor fi concretizate la cazul cuantificării câmpului Klein - Gordon, pe varietatea spațio - temporală  $S^3 \times R$ , înzestrată cu metrica (1.179, 183), pentru care operatorul Laplace - Beltrami (2.60) are expresia

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{\sin(2\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(2\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}] + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{a^2} \tilde{\Delta} \end{aligned} \quad (2.79)$$



Utilizând (2.79) și relația de descompunere (2.61), în ecuațiile Klein - Gordon (2.59), se obține forma explicită a ecuației (2.64.a), pentru funcțiile proprii ortonormale  $\Lambda_{\vec{n}}(x^i) = \Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta)$

$$\frac{1}{\sin(2\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(2\theta) \frac{\partial \Lambda_{\vec{n}}}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \Lambda_{\vec{n}}}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Lambda_{\vec{n}}}{\partial \beta^2} + a^2(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2) \Lambda_{\vec{n}} = 0 \quad (2.80)$$

Aplicând în ecuația (2.80) metoda Fourier de separare a variabilelor

$$\Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta) = \Theta(\theta) A(\alpha) B(\beta), \quad (2.81)$$

se obțin pentru funcțiile  $A$  și  $B$  expresiile

$$A(\alpha) = \exp(im_1 \alpha)$$

$$\text{cu } m_1, m_2 \in Z \quad (2.82)$$

$$B(\beta) = \exp(im_2 \beta)$$

iar pentru funcția  $\Theta$  ecuația

$$\frac{1}{\sin(2\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(2\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ a^2(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2) - \frac{m_1^2}{\cos^2 \theta} - \frac{m_2^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (2.83)$$

Efectuând, în ecuația (2.83), schimbarea de variabilă

$$z = \cos(2\theta) \quad (2.84)$$

și schimbarea de funcție

$$\Theta(\theta) = (1+z)^{m_1/2} (1-z)^{m_2/2} U(z), \quad (2.85)$$

se ajunge la ecuația

$$(1-z^2) \frac{d^2 U}{dz^2} - [(m_2 - m_1) + (m_2 + m_1 + 2)z] \frac{dU}{dz} + \left[ \frac{a^2}{4}(\omega_{\vec{n}}^2 - m_0^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) (m_1 + m_2 + 2) \right] U = 0 \quad (2.86)$$



care admite structura spectrală

$$\omega_n^2 = m_0^2 + \frac{4}{a^2} \left( n + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) \left( n + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + 1 \right) ; n \in N \quad (2.87)$$

și soluția regulată de tip polinomial Jacobi

$$U(z) = P_n^{(m_2, m_1)}(z) \quad (2.88)$$

unde

$$P_n^{(m_2, m_1)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+z)^{-m_1} (1-z)^{-m_2} \frac{d^n}{dz^n} [(1+z)^{n+m_1} (1-z)^{n+m_2}] \quad (2.89)$$

sunt polinoamele Jacobi de grad  $n$ .

Introducând numerele cuantice

$$\begin{aligned} m' &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \\ m &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2) \\ j &= n + m' \end{aligned} \quad (2.90)$$

și înmulțind membrul drept al expresiei (2.85) pentru funcția  $\Theta$  cu termenul factor

$$\left[ \frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2}$$

se obține, luând în considerare și (2.82), setul complet al funcțiilor proprii ortonormale  $\{\Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta) ; \vec{n} = (j, m', m)\}$ , în raport cu măsura

$$\sqrt{-g} d^3x = \frac{a^3}{2} \sin(2\theta) d\theta d\alpha d\beta \quad (2.91)$$

ale operatorului Laplace - Beltrami -  $S^3$  (2.79)

$$\begin{aligned} \Lambda_{\vec{n}}(\theta, \alpha, \beta) &= \sqrt{\frac{2j+1}{V}} \exp[i(m'-m)\beta] W_{m'm}^j(2\theta) \exp[i(m'+m)\alpha] \\ &= \mathcal{D}_{m'm}^j(\theta, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.92)$$



Aici  $V = 2\pi^2 a^3$  este volumul sferei  $S^3$  iar  $W_{m'm}^{(j)}(2\theta)$  sunt funcțiile Wigner

$$W_{m'm}^{(j)}(2\theta) = \left[ \frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{1/2} (\cos \theta)^{m'+m} (\sin \theta)^{m'-m} \cdot P_{j-m'}^{(m'-m, m'+m)}(\cos(2\theta)) \quad (2.93)$$

Evident, din (2.90) și (2.87), rezultă spectrul energetic discret

$$\omega_{\vec{n}} = \left[ m_0^2 + \frac{4}{a^2} j(j+1) \right]^{1/2} \quad (2.94)$$

Cu ajutorul funcțiilor proprii (2.92), se pot explicita relațiile (2.62.a), (2.62.b), obținându-se forma concretă a operatorilor de câmp  $\phi(x)$ ,  $\bar{\phi}(x)$  pe  $S^3 \times R$ :

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \sum_j \sum_{m'=-j}^j \sum_{m=-j}^j \left[ \frac{a_+(j, m', m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + \right. \\ & \left. + \frac{a_-(j, m', m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}}t) \right] \mathcal{D}_{m'm}^j(\theta, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x) = & \sum_j \sum_{m'=-j}^j \sum_{m=-j}^j \left[ \frac{b_+(j, m', m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(i\omega_{\vec{n}}t) + \right. \\ & \left. + \frac{b_-(j, m', m)}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}}} \exp(-i\omega_{\vec{n}}t) \right] \bar{\mathcal{D}}_{m'm}^j(\theta, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.96)$$

iar, din (2.92) și (2.78) rezultă pentru propagatorul câmpului  $\phi(x)$  pe  $S^3 \times R$  expresia concretă

$$\begin{aligned} D_{m_0}^{(c)}(\bar{x}, x) = & - \sum_j \sum_{m'=-j}^j \sum_{m=-j}^j (2\omega_{\vec{n}})^{-1} \left\{ \hat{\theta}(\bar{t} - t) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(\bar{t} - t)] + \right. \\ & \left. + \hat{\theta}(t - \bar{t}) \exp[-i\omega_{\vec{n}}(t - \bar{t})] \right\} \mathcal{D}_{m'm}^j(\bar{\theta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \mathcal{D}_{m'm}^j(\theta, \alpha, \beta) \end{aligned}$$



# Bibliografie

- [1] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1993, *TENSOR N.S.* **53**, 162.
- [2] Straumann, N., 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Berlin: Springer-Verlag.
- [3] Zet, G., 1990, *Found. Phys.* **20**, 111.
- [4] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.
- [5] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.
- [6] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.
- [7] Birrell, N.D., and Davies, P.C.W., 1982, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [8] Fulling, S.A., 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [9] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, in *Lagrange and Finsler Geometry*, ed. P.L. Antonelli and R. Miron, Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.



# Cuprins

<b>3</b>	<b>FERMIONI PE <math>S^3 \times R</math></b>	<b>89</b>
3.1	Câmpul Dirac în Universul Einstein . . . . .	89
3.2	Zero - modurile câmpului de spin $1/2$ în spațiu - timpul $S^3 \times R$ . . . . .	99
3.3	O metodă algebrică, formal - perturbativă de integrare a ecuației Dirac pe spațiu - timp curb . . . . .	102
3.3.1	Stabilirea convențiilor . . . . .	103
3.3.2	Soluția dinamică de ordinul întâi . . . . .	106
3.4	Geometrodinamica $SO(3,1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills și Rarita - Schwinger . . . . .	110



# Capitolul 3

## FERMIONI PE $S^3 \times R$

### 3.1 Câmpul Dirac în Universul Einstein

În prima parte a acestui paragraf, vom construi expresia generală a lagrangeianului Dirac, pe varietatea spațio - temporală  $S^3 \times R$ , prin două metode

- Prima, utilizând formalismul tetradic, are ca punct de plecare lucrarea lui D. Sen [1], în care sunt deduse expresiile lagrangeienilor pentru fermionii Dirac, Weyl și Majorana. În ultimul paragraf al acestui capitol, vom dezvolta acest formalism în cadrul unei teorii  $SU(N)$  - gauge invariante, pentru fermionii de spin  $1/2$  și  $3/2$ , obținând sistemul de ecuații Dirac - Yang - Mills și respectiv Rarita - Schwinger - Yang - Mills.
- A doua metodă de studiu a fermionilor pe spațiu - timpul  $S^3 \times R$ , inițiată de M. Carmeli și S. Malin [2-7], are la bază simetriile globale ale acestei varietăți. Astfel, prin analogie cu spațiul



Minkowski, unde cele patru translații formează un subgrup invariant al grupului Poincare, grupul corespunzător lui  $S^3 \times R$  conține un subgrup generat de  $ic_4 = i\partial_t$  și  $\{J_i = i(L_i + S_i)\}_{i=1,2,3}$ . De altfel, M. Carmeli aplicase, anterior, această metodă, de trecere de la reprezentarea de impuls la cea de moment cinetic orbital, la scrierea ecuației Schrödinger pe  $S^3 \times R$ , pentru o particulă de masă  $m_0$  și moment de inerție  $I_0$ , sub forma [2]

$$\left(-\frac{\vec{L}^2}{2I_0} + V\right)\psi = i\partial_t\psi \quad (3.1)$$

unde operatorul moment cinetic orbital  $\vec{L}$  este o funcție de cele trei unghiuri Euler. În mod analog, ecuația Klein - Gordon pentru particula liberă

$$\left(\vec{L}^2 - \frac{1}{\gamma^2}\partial_t^2\right)\phi(t, \theta) = (I_0\gamma)^2\phi(t, \theta) \quad (3.2)$$

cu  $\gamma = (m_0/I_0)^{1/2}$  particularizează pe (2.16.a) pentru  $A_\mu = 0$ . Evident, în (3.2),  $\gamma^2 L^2$  este laplaceianul pe  $S^3$ .

Surprinzător este faptul că simetria maximă a varietății  $S^3$  și păstrarea separată a dimensiunii temporale plate simplifică mult problema formulării teoriilor de câmp pe această varietate, conducând la generalizări directe ale rezultatelor similare de pe spațiul Minkowski. În lucrarea [4], M. Carmeli și S. Malin aplică procedeul descris mai sus și în cazul formulării ecuației Dirac, pe care o scriu într-o formă analoagă celei de pe spațiul plat

$$(\partial_t + \vec{\alpha} \cdot \vec{L} + iI_0\beta)\psi = 0 \quad (3.3)$$

În cele ce urmează, vom completa ecuația (3.3) în cadrul unei teorii  $SO(3, 1) \times SU(N)$  - gauge invariante, punând în evidență un



termen suplimentar ce exprimă contribuția efectelor gravitaționale de spin.

Considerațiile de mai sus au la bază faptul că varietatea grupului  $SU(2)$  este topologic echivalentă cu sfera  $S^3$ .

Intr-adevăr, pentru sfera  $S^3$ , definită ca mulțimea punctelor cu distanța la origine egală cu unitatea

$$S^3 = \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in R^4, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}, \quad (3.4)$$

și având simetria de rotație  $O(4)$  a cărei algebră Lie este  $SU(2) \times SU(2)$ , se poate introduce o aplicație de la punctele lui  $S^3$  la elementele grupului  $SU(2)$ . Astfel, orice element  $U$  al lui  $SU(2)$  se scrie, în funcție de matricile lui Pauli  $\{\sigma_i\}_{i=1,2,3}$ , sub forma

$$U = x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.5)$$

cu  $x_4^2 + \vec{x}^2 = 1$ , care este tocmai ecuația sferei  $S^3$ , în spațiul euclidian 4-dimensional.

Pentru descrierea câmpurilor fermionice pe  $S^3 \times R$ , trebuie să construim, mai întâi, în fiecare punct al varietății, un reper tetradic. Deoarece timpul este plat și separat de componentele spațiale compactificate, iar sfera  $S^3$  este paralelizabilă, vom construi în fiecare punct de pe sfera  $S^3$ , un reper format din trei vectori ortogonali, continuu peste tot. Vectorii

$$\begin{aligned} X_1 &= x^4 \partial_1 + x^3 \partial_2 - x^2 \partial_3 - x^1 \partial_4 \\ X_2 &= -x^3 \partial_1 + x^4 \partial_2 + x^1 \partial_3 - x^2 \partial_4 \\ X_3 &= x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + x^4 \partial_3 - x^3 \partial_4 \end{aligned} \quad (3.6)$$



formează un triad drept și satisfac algebra

$$[X_1, X_2] = 2X_3 ; [X_2, X_3] = 2X_1 ; [X_3, X_1] = 2X_2 \quad (3.7)$$

Triadul stâng  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  se poate raporta la acesta prin operația de paritate

$$Y_i = -PX_i \quad (3.8)$$

și conține vectorii

$$\begin{aligned} Y_1 &= x^4 \partial_1 - x^3 \partial_2 + x^2 \partial_3 - x^1 \partial_4 \\ Y_2 &= x^3 \partial_1 + x^4 \partial_2 - x^1 \partial_3 - x^2 \partial_4 \\ Y_3 &= -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2 + x^4 \partial_3 - x^3 \partial_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

satisfăcând relațiile de comutare

$$[Y_1, Y_2] = -2Y_3 ; [Y_2, Y_3] = -2Y_1 ; [Y_3, Y_1] = -2Y_2 \quad (3.10)$$

Se observă că putem forma următoarele combinații

$$\begin{aligned} a) \quad L_i &= \frac{i}{2}(X_i - Y_i) = -i\epsilon_{ijk}x^j\partial_k \\ b) \quad K_i &= \frac{i}{2}(X_i + Y_i) = i(x^4\partial_i - x^i\partial_4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

unde  $\{L_i, K_i\}_{i=1,2,3}$  corespund, în limita razei sferei tinzând la infinit, celor 6 generatori ai algebrei Lorentz pe spațiul Minkowski

$$\begin{aligned} a) \quad [L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk}L^k \\ b) \quad [K_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}L^k \\ c) \quad [L_i, K_j] &= i\epsilon_{ijs}K^s \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pentru  $(x^4 = 1)$ ,  $\{L_i\}_{i=1,2,3}$  generează rotații în jurul lui  $x^i$ , iar  $\{K^i\}_{i=1,2,3}$  generează translații în lungul lui  $x^i$ . Rotațiile în planele  $(x^i, x^4)$ , corespunzând simetriilor boost, sunt absente.



formează un triad drept și satisfac algebra

$$[X_1, X_2] = 2X_3 ; [X_2, X_3] = 2X_1 ; [X_3, X_1] = 2X_2 \quad (3.7)$$

Triadul stâng  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  se poate raporta la acesta prin operația de paritate

$$Y_i = -PX_i \quad (3.8)$$

și conține vectorii

$$\begin{aligned} Y_1 &= x^4 \partial_1 - x^3 \partial_2 + x^2 \partial_3 - x^1 \partial_4 \\ Y_2 &= x^3 \partial_1 + x^4 \partial_2 - x^1 \partial_3 - x^2 \partial_4 \\ Y_3 &= -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2 + x^4 \partial_3 - x^3 \partial_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

satisfăcând relațiile de comutare

$$[Y_1, Y_2] = -2Y_3 ; [Y_2, Y_3] = -2Y_1 ; [Y_3, Y_1] = -2Y_2 \quad (3.10)$$

Se observă că putem forma următoarele combinații

$$\begin{aligned} a) \quad L_i &= \frac{i}{2}(X_i - Y_i) = -i\varepsilon_{ijk}x_l \partial_k \\ b) \quad K_i &= \frac{i}{2}(X_i + Y_i) = i(x^4 \partial_i - x^i \partial_4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

unde  $\{L_i, K_i\}_{i=1,2,3}$  corespund, în limita razei sferei tinzând la infinit, celor 6 generatori ai algebrei Lorentz pe spațiul Minkowski

$$\begin{aligned} a) \quad [L_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk}L^k \\ b) \quad [K_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}L^k \\ c) \quad [L_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijs}K^s \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pentru  $(x^4 = 1)$ ,  $\{L_i\}_{i=1,2,3}$  generează rotații în jurul lui  $x^i$ , iar  $\{K^i\}_{i=1,2,3}$  generează translații în lungul lui  $x^i$ . Rotațiile în planele  $(x^i, x^4)$ , corespunzând simetriilor *boost*, sunt absente.



Baza duală, corespunzătoare tetradului  $\{e_\mu\}_{\mu=\overline{1,4}} = \{X_1, X_2, X_3, \partial_t\}$ , se va obține din

$$\omega^a(e_b) = \delta_b^a \quad (3.13)$$

și este de forma

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cos(\alpha + \beta) \sin \theta \cos \theta (d\alpha - d\beta) - \sin(\alpha + \beta) d\theta \\ \omega^2 &= \sin(\alpha + \beta) \sin \theta \cos \theta (d\alpha - d\beta) + \cos(\alpha + \beta) d\theta \\ \omega^3 &= -\cos^2 \theta d\alpha - \sin^2 \theta d\beta \\ \omega^4 &= dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

iar cea corespunzătoare lui  $\{Y_1, Y_2, Y_3, \partial_t\}$  este

$$\begin{aligned} \tau^1 &= -\cos(\alpha - \beta) \sin \theta \cos \theta (d\alpha + d\beta) + \sin(\alpha - \beta) d\theta \\ \tau^2 &= -\sin(\alpha - \beta) \sin \theta \cos \theta (d\alpha + d\beta) - \cos(\alpha - \beta) d\theta \\ \tau^3 &= \cos^2 \theta d\alpha - \sin^2 \theta d\beta \\ \tau^4 &= dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

În cele ce urmează, notăm tetradul (3.14) cu  $\omega^\mu (\mu = \overline{1,4})$  și exprimându-l ca

$$\omega^\mu = \omega_{mn}^\mu dx^m; (x^m) = (\alpha, \beta, \theta, t) \quad m = \overline{1,4} \quad (3.16)$$

obținem pentru elementul de arc

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu = g_{mn} \omega_m^\mu \omega_n^\nu dx^m dx^n = g_{mn} dx^m dx^n \quad (3.17)$$

expresia cunoscută (1.183, 179)

$$ds^2 = \cos^2 \theta (d\alpha)^2 + \sin^2 \theta (d\beta)^2 + (d\theta)^2 - (dt)^2$$



Vom introduce 1 - forma conexiunii de spin prin definiția uzuală

$$\begin{aligned} d\omega^\mu &= -w^\mu_\nu \wedge \omega^\nu \\ w_{\mu\nu} &= w_{\mu\nu m} dx^m \end{aligned} \quad (3.18)$$

din care, prin comparație cu prima ecuație Cartan

$$d\omega^a + \Gamma^a_b \wedge \omega^b = 0 \quad (3.19)$$

unde

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -\varepsilon_{4\mu\nu\alpha} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha 4} \quad (3.20)$$

se obține

$$\begin{aligned} a) \quad w_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho 4} \omega^\rho ; \quad w_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega^k \\ b) \quad w_{i4} &= 0, \quad i, j, k = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Forma  $SO(3, 1)$  gauge invariantă a ecuației Dirac pentru particula de masă  $M$  și spin  $1/2$  este

$$(i\gamma^\mu \omega_\mu^m \nabla_m - M)\psi = 0 \quad (3.22)$$

unde derivata covariantă  $\nabla_m$  are expresia

$$\nabla_m = \partial_m + \frac{i}{2} w_{\mu\nu m} \sigma^{\mu\nu} \quad (3.23)$$

Deoarece matricea  $\sigma^{\mu\nu}$  poate fi exprimată în funcție de matricile  $\gamma$  prin relația

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.24)$$

expresia derivatei covariante devine

$$\nabla_m = \partial_m - \frac{1}{4} w_{\mu\nu m} \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (3.25)$$



sau, pe componente

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla_i &= \partial_i + \frac{1}{4} \varepsilon_{jki} \gamma^j \gamma^k \\ b) \quad \nabla_4 &= \partial_4 = \partial_t, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cu aceste rezultate, operatorul Dirac capătă forma

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \nabla_\mu &= \gamma^\mu \omega_\mu^m \nabla_m = \\ &= \gamma^\mu e_\mu + \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \gamma^i \gamma^j \gamma^k = \gamma^\mu e_\mu + i \frac{3}{2} \gamma^5 \gamma^4 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Astfel, ecuația Dirac, pentru particula de spin  $1/2$ , pe varietatea  $S^3 \times R$ , este

$$\left( i \gamma^\mu e_\mu - \frac{3}{2} \gamma^5 \gamma^4 - M \right) \psi = 0 \quad (3.28)$$

și ea derivă dintr-un lagrangeian de tipul

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \left( e_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu e_\mu \psi - \frac{3}{2} \gamma^5 \gamma^4 - M \right) \psi \quad (3.29)$$

unde  $\psi$  este spinorul Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad A, \dot{A} = 1, 2 \quad (3.30)$$

Indicii  $A, \dot{A}$  se ridică și se coboară cu ajutorul tensorului antisimetric

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Spinorii cu două componente din (3.30) se transformă cu ajutorul reprezentărilor grupului  $SL(2, C)$ , definit ca

$$SL(2, C) = \{ M \in GL(2, C) \mid \det M = 1 \} \quad (3.32)$$



astfel

$$\begin{aligned}\psi_{A'} &= M_A^{B'} \psi_B \\ \bar{\psi}^{A'} &= (M^{*-1T})^{A'}_B \bar{\psi}^B\end{aligned}\quad (3.33)$$

Dacă la cele trei matrici Pauli  $\{\sigma^i\}_{i=1,2,3}$  ce determină componentele spinului prin

$$S_i = \frac{\sigma^i}{2} \quad (3.34)$$

se adaugă matricea unitate  $\sigma^0 = I_2$ , vom obține un set de patru matrici cu indici mixti,  $\{\sigma^\mu = (\sigma^\mu_{AB})\}_{\mu=\overline{1,4}}$  și încă unul,  $\{\bar{\sigma}^\mu = (\bar{\sigma}^\mu_{AB})\}_{\mu=\overline{1,4}}$  definit prin

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^i &= -\sigma^i \\ \bar{\sigma}^0 &= \sigma^0\end{aligned}\quad (3.35)$$

În funcție de acestea, matricile  $\gamma$  în baza Dirac se exprimă ca

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Următoarele combinații

$$\sigma_{2 \times 2}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad (3.37)$$

și respectiv

$$\bar{\sigma}_{2 \times 2}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \quad (3.38)$$

ce satisfac algebra Lorentz uzuală:

$$\begin{aligned}[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] &= -(\eta_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta} + \eta_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha}) \\ [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho] &= -i(\eta_{\mu\rho}\gamma_\nu - \eta_{\nu\rho}\gamma_\mu)\end{aligned}\quad (3.39)$$



unde  $\eta_{\mu\nu}$  este metrica Minkowski  $(1, 1, 1, -1)$ , definesc operatorul moment cinetic de spin prin relația

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} = \frac{i}{4} \varepsilon_{ijk} \gamma^j \gamma^k \text{ cu } i, j, k = \overline{1, 3} \quad (3.40)$$

Să revenim acum la cea de a doua metodă de abordare a teoriei fermionilor, având la bază metoda grupurilor Lie, propusă de M. Carmeli și S. Malin, pentru formularea ecuațiilor Schrödinger și Klein - Gordon pe  $S^3 \times R$ . În acest scop, vom prelua ecuația Dirac uzuală, de pe spațiu - timp plat și înlocuind operatorul impuls cu operatorul moment cinetic total

$$J_i = L_i + S_i, \quad (3.41)$$

vom obține următoarea formă a ecuației Dirac pe  $S^3 \times R$

$$(\gamma^\mu J_\mu - M)\psi = 0 \quad (3.42)$$

care, în urma efectuării calculelor, capătă forma explicită

$$\begin{aligned} & (i\gamma^4 \partial_t + \gamma^i L_i + \gamma^i S_i - M)\psi = \\ & = (i\gamma^4 \partial_t - i\varepsilon_{ijk} \gamma^i x_j \partial_k - \frac{3}{2} \gamma^5 \gamma^4 - M)\psi = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pentru sfera  $S^3$  de rază  $a$ , ecuația Dirac se va scrie deci [8]

$$\left[ i\gamma^\mu L_\mu + \frac{3}{2a} \gamma^4 \gamma^5 - M \right] \psi = 0 \quad (3.44)$$

unde termenul adițional  $(3/2a)\gamma^4 \gamma^5 \psi$ , absent în lucrările lui Carmeli și Malin, exprimă contribuția efectelor gravitaționale de spin. Un astfel de termen nu violează paritatea și nici simetria combinată  $CP$ . Dacă  $a$  este raza Universului, el este desigur foarte mic, dar este probabil că a jucat un rol important în stagiul primordial de evoluție a acestuia.



Operatorii  $\{L_\mu\}_{\mu=\overline{1,4}} = \{L_4 = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, L_i\}$  satisfac relațiile de comutatori [9]

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \frac{2}{a} \varepsilon_{ij}^k L_k \\ [L_4, L_i] &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

unde momentele cinetice  $\{L_i\}_{i=\overline{1,3}}$  coincid cu tetradul *right - handed*  $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$  introdus în capitolul 1.

În sfârșit, funcția de undă  $\psi$ , element al produsului tensorial al spațiului Hilbert  $\mathcal{L}^2$  al funcțiilor definite pe  $S^3$  cu  $\mathcal{S}_4$ , poate fi scrisă în funcție de spinorii cu două componente ca

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Ecuatia Dirac (3.44) este echivalentă cu sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^1}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \Psi^1 - \frac{3i}{2a} \Psi^1 + iM \Psi^2 &= 0 \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \Psi^2 + \frac{3i}{2a} \Psi^2 + iM \Psi^1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

care, la fel ca în cazul minkowskian, la limita  $M = 0$ , se decuplează.

De asemenea, ecuația (3.44) ne conduce la condiția *on - shell*

$$L_\mu^2 + M^2 + \frac{\gamma^5}{a} (iL_4 + M\gamma^4) + \frac{3}{4a^2} = 0 \quad (3.48)$$

și la expresia simbolică a propagatorului fermionic pe  $S^3 \times R$

$$S_F = - \frac{i\gamma^\mu L_\mu + M - (2a)^{-1} \gamma^5 \gamma^4}{L_\mu^2 + M^2 + a^{-1} \gamma^5 (iL_4 + M\gamma^4) + \frac{3}{4}a^{-2}} \quad (3.49)$$



### 3.2 Zero - modurile câmpului de spin 1/2 în spațiu - timpul $S^3 \times R$

În cele ce urmează, vom rezolva ecuația Dirac (3.44), pentru modurile de energie zero a cuantei câmpului nemasiv. După cum vom vedea, spre deosebire de cazul minkowskian, vidul fermionic pe varietatea  $S^3$  este alcătuit din moduri statice netriviale, cu chiralitate bine definită.

Utilizând parametrizarea (1.177) pentru sfera de rază  $a = \text{constant}$ , consistentă cu metrica (1.179), și tetradul  $\{L_\mu\}_{\mu=1,4}$  satisfăcând relațiile de comutatori (3.45), ecuația Dirac (3.44), pentru cazul static, devine

$$[i\gamma^i L_i + \frac{3}{2a}\gamma^4\gamma^5 - M]\psi = 0 \quad (3.50)$$

Vom alege pentru matricile  $\gamma$  reprezentarea Kramers [10]

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

și, exploatând simetria rotațională  $(\alpha + \beta)$ , sugerată de operatorul  $L_3$ , vom exprima, în mod generic, soluția statică  $\psi$  ca

$$\psi(\alpha + \beta, \theta) = \begin{pmatrix} S_p(\alpha + \beta)f_1(\theta) \\ S_p(\alpha + \beta)f_2(\theta) \\ S_a(\alpha + \beta)f_3(\theta) \\ S_a(\alpha + \beta)f_4(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

condițiile de integrabilitate impunând ca singură formă posibilă pentru funcțiile azimutale  $S_a$  și  $S_p$  pe

$$S_a(\alpha + \beta) = \exp[i\eta(\alpha + \beta)]$$

, cu  $k, \eta = \text{const.}$

$$S_p(\alpha + \beta) = k \exp[i\eta(\alpha + \beta)] \quad (3.53)$$



De asemenea, acestea decuplează sistemul diferențial, conducând la următoarele ecuații pentru funcțiile  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$ ,  $f_3(\theta)$ ,  $f_4(\theta)$

$$\begin{aligned} \frac{df_a}{d\theta} - 2\eta \cot(2\theta) f_a &= 0, \quad a = 1, 3 \\ \frac{df_b}{d\theta} + 2\eta \cot(2\theta) f_b &= 0, \quad b = 2, 4 \end{aligned} \quad (3.54)$$

împreună cu ecuația *seculară* pentru  $\eta$

$$\eta^4 + \frac{1}{2} \left( \mu^2 - \frac{9}{4} \right) \eta^2 + \frac{1}{16} \left( \mu^2 + \frac{9}{4} \right)^2 = 0, \text{ cu } \mu = Ma \quad (3.55)$$

Cele două seturi de rădăcini:

$$\eta_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i \frac{\mu}{2} \quad (3.56)$$

și

$$\eta_{3,4} = -\frac{3}{4} \pm i \frac{\mu}{2} \quad (3.57)$$

vor corespunde soluțiilor

$$\psi_1 = C \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4} - i\frac{\mu}{2}} \exp \left[ -\frac{\mu}{2}(\alpha + \beta) \right] \exp \left[ i\frac{3}{4}(\alpha + \beta) \right] \quad (3.58)$$

$$\psi_2 = C \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4} + i\frac{\mu}{2}} \exp \left[ \frac{\mu}{2}(\alpha + \beta) \right] \exp \left[ i\frac{3}{4}(\alpha + \beta) \right]$$



și respectiv

$$\psi_3 = C \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4} + i\frac{\mu}{2}} \exp\left[-\frac{\mu}{2}(\alpha + \beta)\right] \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right] \quad (3.59)$$

$$\psi_4 = C \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-\frac{3}{4} - i\frac{\mu}{2}} \exp\left[\frac{\mu}{2}(\alpha + \beta)\right] \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right]$$

Se observă fără nici o dificultate că periodicitatea în  $(\alpha + \beta)$  reclamă, în mod clar, o soluție de câmp de masă nulă. În sfârșit, condiția de normare

$$\int_0^{\pi/2} \bar{\psi} \gamma_0 \psi 2\pi^2 \sin(2\theta) d\theta = 1 \quad (3.60)$$

fixează constanta de integrare

$$C = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)}} \quad (3.61)$$

În mod surprinzător, soluția bispinorială fundamentală  $\{\psi_a\}_{a=\overline{1,4}}$  cu  $M = 0$  conduce direct la combinațiile liniare

$$\psi_L^{(up)} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right] \quad (3.62)$$

$$\psi_L^{(dn)} = \frac{1}{2}(\psi_3 + \psi_4) = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right]$$



și

$$\psi_R^{(dn)} = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2) = iC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp \left[ i \frac{3}{4}(\alpha + \beta) \right] \quad (3.63)$$

$$\psi_R^{(up)} = \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_4) = -iC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp \left[ -i \frac{3}{4}(\alpha + \beta) \right]$$

a căror chiralitate bine definită exprimă conținutul vidului fermionic de spin  $1/2$  pe sfera  $S^3$ . Spre deosebire de cazul minkowskian, acesta se constituie din moduri statice, netriviiale, ale câmpurilor (anti) neutrinice.

### 3.3 O metodă algebrică, formal - perturbativă de integrare a ecuației Dirac pe spațiu - timp curb

Generalizând rezultatele paragrafelor anterioare, vom obține forma  $SO(3, 1)$  - gauge covariantă a ecuației Dirac pe o 4 - varietate diferențibilă pseudoriemanniană, înzestrată cu conexiune Levi - Civita și vom prezenta o metodă algebrică de construire, din aproape în aproape, a soluțiilor dinamice corespunzătoare [11].

Deși nu există, încă, o teorie cuantică riguroasă a gravitației, fizica contemporană are nevoie, deopotrivă, atât de Relativitatea Generală cât și de Teoria Cuantică a Câmpurilor materiale (deocamdată fără



gravitație) pentru a descrie dinamica Universului la toate scările sale de existență. Lucrări recente sunt dedicate efectelor cuantice de creare de particule în diverse modele cosmologice (Leigh și Rattazzi, 1995). Dar, ecuația Dirac fiind invariantă conformal, precum cea descriind fotonii și neutrinii, o expansiune izotropică a Universului nu dă naștere acestor particule. În Modelul Standard Cosmologic, plasma care umplea Universul timpuriu era formată atât din bozoni cât și din fermioni de foarte mare energie. Din acest motiv, formularea general covariantă a celor două ecuații, Dirac și Klein - Gordon, precum și integrarea lor, joacă un rol esențial în surprinderea *in vitro*, la curburi și energii mari, a dinamicii acestor câmpuri.

### 3.3.1 Stabilirea convențiilor

Metrica uzuală a spațiu - timpului

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (3.64)$$

poate fi adusă la forma

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \quad (3.65)$$

prin definirea adecvată a tetradului dual pseudo - ortonormal

$$\omega^a = \omega_i^a dx^i \quad (3.66)$$

corespunzător, prin

$$\langle \omega^a, e_b \rangle = \delta_b^a, \quad (3.67)$$

bazei tetradice pseudo - ortonormale

$$e_a = e_i^a \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.68)$$



În general, 1 - forma coeficienților de conexiune,  $\Gamma_{ab}^c$ , definiți prin

$$\nabla_b e_a = \Gamma_{ab}^c e_c \quad (3.69)$$

se calculează cu ajutorul primei ecuații de structură Cartan

$$d\omega^a = -\Gamma_{ab}^a \wedge \omega^b \quad (3.70)$$

în absența torsiunii, adică în cazul unei conexiuni simetrice.

Deoarece, în raport cu baza tensorială rigidă  $\{\omega^a \otimes \omega^b\}_{a,b=\overline{1,4}}$ , metrica

$$g = \eta \quad (3.71)$$

este constantă (minkowskiană), condiția metrică pentru conexiunea liniară  $\Gamma$  este

$$g_{ab;c} = 0$$

sau

$$\Gamma_{(ab)c} = 0 \quad (3.72)$$

exprimând cunoscuta antisimetrie, în primii doi indici, a coeficienților de conexiune în raport cu un reper rigid.

În acord cu Principiul Echivalenței, în formulare locală, orice ecuație de câmp, Lorentz - covariantă în spațiul Minkowski, poate fi exprimată într-o formă general gauge - covariantă într-un spațiu - timp curb, în raport cu o bază pseudo - ortonormală, pur și simplu prin înlocuirea derivatelor parțiale cu cele  $SO(3, 1)$  gauge - covariante, adică

$$\partial_a \longrightarrow \nabla_a \quad (3.73)$$

sau, utilizând notația condensată

$$(\cdot)_{,a} \longrightarrow (\cdot)_{;a} \quad (3.74)$$



Astfel, ecuațiile Dirac în spațiul Minkowski

$$\gamma^i \psi_{;i} + m\psi = 0 ; \bar{\psi}_{;i} \gamma^i - m\bar{\psi} = 0 \quad (3.75)$$

capătă forma  $SO(3, 1)$  - gauge covariantă

$$\gamma^a \psi_{;a} + m\psi = 0 ; \bar{\psi}_{;a} \gamma^a - m\bar{\psi} = 0 \quad (3.76)$$

unde, după cum am precizat mai sus,

$$\psi_{;a} = \psi_{|a} + \frac{1}{4} \Gamma_{bca} \gamma^b \gamma^c \psi ; \bar{\psi}_{;a} = \bar{\psi}_{|a} - \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^b \gamma^c \Gamma_{bca}, \quad (3.77)$$

Vom considera matricile Dirac,  $\gamma$ , satisfăcând algebra

$$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab}, \quad (3.78)$$

în cea mai uzuală reprezentare

$$\gamma^\mu = \gamma_\mu = -i\beta\alpha^\mu, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (3.79)$$

$$\gamma^4 = -\gamma_4 = -i\beta$$

cu

$$\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} ; \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

$\sigma^\mu$  fiind matricile Pauli. În consecință,  $\gamma^5 = \gamma_5$  fiind în general definită prin

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{abcd} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d, \text{ cu } \varepsilon_{1234} = -\varepsilon^{1234} = -1, \quad (3.81)$$

capătă forma concretă

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$



### 3.3.2 Soluția dinamică de ordinul întâi

În cele ce urmează, vom obține soluția ecuației (3.76), printr-o metodă algebrică și vom construi imaginea sa în spațiul impulsului.

Pentru început, să scriem soluția dinamică de ordinul zero. Neglijând  $\Gamma$  în expresiile derivatelor covariante din (3.77), ecuația (3.76) devine

$$\gamma^a \psi_{|a} + m\psi = 0 \quad (3.83)$$

putând fi tratată formal, la nivel algebric, ca și echivalentul său minkowskian

$$D_+^{(0)}\psi = 0 ; \text{ cu } D_+^{(0)}(x) = \gamma^i \partial_i + m \quad (3.84)$$

Astfel,

$$D_+^{(0)}(x)[e^{ipx}] = i(\hat{p} - im)e^{ipx} \text{ cu } \hat{p} = \gamma \cdot p \quad (3.85)$$

și presupunând că  $[D_+^{(0)}(x)]^{-1}$  este inversul lui  $D_+^{(0)}(x)$ , rezultă

$$i [D_+^{(0)}(x)]^{-1} (e^{ipx})(\hat{p} - im) = e^{ipx}$$

adică

$$[D_+^{(0)}(x)]^{-1} (e^{ipx}) = -i \frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2} e^{ipx} \quad (3.86)$$

deoarece

$$(\hat{p} + im)(\hat{p} - im) = p^2 + m^2 \quad (3.87)$$

Scriem acum pe (3.76) sub forma

$$\gamma^a \psi_{|a} + m\psi = -\frac{1}{4} \Gamma_{bca} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \psi \quad (3.88)$$

sau

$$D_+(x)\psi(x) = \frac{1}{2} \Gamma_a^*(x) \gamma^a \psi(x), \quad (3.89)$$



unde am utilizat identitatea

$$\gamma^a \gamma^b \gamma^c = \eta^{ab} \gamma^c + \eta^{bc} \gamma^a - \eta^{ca} \gamma^b + i \varepsilon^{abcd} \gamma_d \gamma_5 \quad (3.90)$$

care aduce membrul drept al lui (3.88) la

$$-\frac{1}{4} \Gamma_{bca} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \psi = \frac{1}{2} \left[ \eta^{bc} \Gamma_{abc} \gamma^a - \frac{i}{2} \varepsilon_a^{bcd} \Gamma_{bcd} \gamma^5 \gamma^a \right] \psi \quad (3.91)$$

Definind conexiunea autoduală

$$\Gamma_a^* = \eta^{bc} \Gamma_{abc} - \frac{i}{2} \varepsilon_a^{bcd} \Gamma_{bcd} \gamma^5 = \Gamma_{a..} - \tilde{\Gamma}_a \gamma^5, \quad (3.92)$$

efectuăm transformata Fourier a lui  $\Gamma^*(x)$  și  $\psi(x)$

$$D_+(x) \psi(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma_a^*(q) \gamma^a (\hat{p} + im) \delta(p^2 + m^2) e^{i(p+q)x} a(p) d^4 q d^4 p \quad (3.93)$$

Astfel, în primul ordin de aproximație, soluția ecuației (3.76) devine

$$\psi(x) = \varphi(x) + \chi(x) \quad (3.94)$$

unde  $\varphi(x)$  este soluția de ordin zero a operatorului  $D_+(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int (\hat{p} + im) \frac{a(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}} e^{ipx} d^3 p \quad (3.95)$$

iar

$$\chi(x) = -\frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{(\hat{q} + \hat{p}) + im}{(q+p)^2 + m^2} \Gamma_a^*(q) \gamma^a (\hat{p} + im) \delta(p^2 + m^2) e^{i(p+q)x} a(p) d^4 q d^4 p \quad (3.96)$$

Imaginea lui  $\chi(x)$  în spațiul impulsului

$$\begin{aligned} \chi(P) &= -\frac{i/2}{(2\pi)^6} \int \frac{(\hat{q} + \hat{p}) + im}{(q+p)^2 + m^2} \Gamma_a^*(q) \gamma^a (\hat{p} + im) \delta(p^2 + m^2) e^{i(q+p-P)x} a(p) d^4 q d^4 p d^4 x \\ &= -\frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \Gamma_a^*(P-p) \gamma^a (\hat{p} + im) \delta(p^2 + m^2) a(p) d^4 p \end{aligned}$$



capătă forma

$$\chi_+(P) = -\frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \Gamma_a^*(P - p) \gamma^a (\hat{p} + im) \frac{a(p)}{\sqrt{2E_p}} d^3p \quad (3.97)$$

pe care este convenabil să o exprimăm în forma matricială

$$\chi_+(P) = -\frac{i/2}{(2\pi)^2} \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \int \Gamma_a^*(P - p) \gamma^a (\hat{p} + im) \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d^3p \quad (3.98)$$

În concluzie, soluția de ordinul întâi (3.94) poate fi scrisă ca următoarea matrice

$$\psi_+(P) = \frac{\hat{P} + im}{\sqrt{2E_P}} - \frac{i/2}{(2\pi)^2} \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \int \Gamma_a^*(P - p) \gamma^a (\hat{p} + im) \frac{1}{\sqrt{2E_p}} d^3p \quad (3.99)$$

Aceeași procedură poate fi urmată și pentru partea adjuncă a ecuației Dirac (3.76). Astfel, pornind de la

$$D_- \bar{\psi}(x) = \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^a \Gamma_a^*(x), \quad (3.100)$$

unde

$$D_- \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_{;a} \gamma^a - m \bar{\psi} \quad (3.101)$$

îl aducem pe (3.100) la forma

$$D_- \bar{\psi}(x) = \frac{1/2}{(2\pi)^4} \int \bar{a}(p) \delta(p^2 + m^2) (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(q) e^{-i(p-q)x} d^4p d^4q \quad (3.102)$$

Observăm că

$$D_-^{-1}(x) [e^{-i(p-q)x}] = i \frac{(\hat{p} - \hat{q}) + im}{(p - q)^2 + m^2} e^{-i(p-q)x} \quad (3.103)$$



și obținem expresia

$$\bar{\chi}(x) = \frac{1/2}{(2\pi)^4} \int \bar{a}(p) \delta(p^2 + m^2) (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(q) \frac{\hat{p} - \hat{q} + im}{(p - q)^2 + m^2} e^{-i(p-q)x} d^4 p d^4 q \quad (3.104)$$

care, în reprezentarea de impuls definită prin

$$\bar{\chi}(P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\chi}(x) e^{iPx} d^4 x, \quad (3.105)$$

capătă forma concretă

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(P) &= \frac{1/2}{(2\pi)^4} \int \bar{a}(p) \delta(p^2 + m^2) (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(q) \frac{\hat{p} - \hat{q} + im}{(p - q)^2 + m^2} \delta(P - (p - q)) d^4 p d^4 q \\ &= \frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \bar{a}(p) \delta(p^2 + m^2) (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(P - p) \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} d^4 p \end{aligned} \quad (3.106)$$

adică

$$\bar{\chi}(P) = \frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}} \bar{a}(p) (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(P - p) \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \quad (3.107)$$

Ca și în cazul precedent, este convenabil să exprimăm, atât pe (3.106) cât și soluția în primul ordin de aproximație, în formulare matricială, adică

$$\bar{\chi}_+(P) = \frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}} (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(P - p) \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \quad (3.108)$$

și

$$\bar{\psi}_+(P) = \frac{\hat{P} + im}{\sqrt{2E_P}} + \frac{i/2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p}} (\hat{p} + im) \gamma^a \Gamma_a^*(P - p) \frac{\hat{P} + im}{P^2 + m^2} \quad (3.109)$$



Formalismul dezvoltat în acest paragraf este general în raport cu imaginile Fourier generalizate ale componentelor 1-formei de conexiune. Astfel, de îndată ce s-a obținut setul complet, ortonormal, de soluții ale ecuației Dirac neperturbate (3.83), orice câmp gravitațional poate fi inclus în teorie, ca o perturbație.

### 3.4 Geometrodinamica $SO(3, 1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills și Rarita - Schwinger

Acest paragraf își propune să ilustreze modul în care prin metoda algebrelor Lie, motivată de proprietățile de simetrie înaltă ale sferei  $S^3$ , varietate a lui  $SU(2)$ , se poate construi o teorie  $SO(3, 1) \times SU(N)$  gauge - invariantă pentru câmpurile fermionice de spin superior. În lagrangeianul Rarita - Schwinger,  $SU(N)$  - gauge invariant, vom pune în evidență o serie de termeni suplimentari, absenți în teoria minkowskiană, datorati efectelor gravitaționale de spin și alegerii bazei pseudo - ortonormale [12].

Pentru sfera  $S^3$ , cu raza unitate, vom folosi parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica (1.179). Proprietățile de simetrie ne sugerează utilizarea triadului *right - handed*  $\{e_i\}_{i=1,3}$  satisfăcând relațiile de comutatori (1.181). Prin adăugarea lui  $e_4 = \partial_t$ , vom introduce baza tetrică pseudo - ortonormală  $\{e_{\mu=1,4}\}$  ce satisface algebra  $SU(2) \times T$  (unde  $T$  reprezintă grupul translațiilor temporale).



Formalismul dezvoltat în acest paragraf este general în raport cu imaginile Fourier generalizate ale componentelor 1-formei de conexiune. Astfel, de îndată ce s-a obținut setul complet, ortonormal, de soluții ale ecuației Dirac neperturbate (3.83), orice câmp gravitațional poate fi inclus în teorie, ca o perturbație.

### 3.4 Geometrodinamica $SO(3, 1) \times SU(N)$ - gauge invariantă a câmpurilor Yang - Mills și Rarita - Schwinger

Acest paragraf își propune să ilustreze modul în care prin metoda algebrilor Lie, motivată de proprietățile de simetrie înaltă ale sferei  $S^3$ , varietate a lui  $SU(2)$ , se poate construi o teorie  $SO(3, 1) \times SU(N)$  gauge - invariantă pentru câmpurile fermionice de spin superior. În lagrangeianul Rarita - Schwinger,  $SU(N)$  - gauge invariant, vom pune în evidență o serie de termeni suplimentari, absenți în teoria minkowskiană, datorati efectelor gravitaționale de spin și alegerii bazei pseudo - ortonormale [12].

Pentru sfera  $S^3$ , cu raza unitate, vom folosi parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica (1.179). Proprietățile de simetrie ne sugerează utilizarea triadului *right - handed*  $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$  satisfăcând relațiile de comutatori (1.181). Prin adăugarea lui  $e_4 = \partial_t$ , vom introduce baza tetrică pseudo - ortonormală  $\{e_{\mu=\overline{1,4}}\}$  ce satisface algebra  $SU(2) \times T$  (unde  $T$  reprezintă grupul translațiilor temporale).



Fie  $G$  un grup Lie simplu cu algebra Lie asociată

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad a, b, c = \overline{1, n} \quad (3.110)$$

Tensorul Yang - Mills corespunzător

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= e_\mu A_\nu^a - e_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c + 2 \varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a} = \\ &= \tilde{F}_{\mu\nu}^a + 2 \varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a} \end{aligned} \quad (3.111)$$

comparat cu forma sa uzuală minkowskiană,  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ , conține un termen suplimentar, datorat necomutativității vectorilor  $\{e_i\}_{i=\overline{1,3}}$ .

În consecință și lagrangeianul Yang - Mills

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = -(\tilde{F}_{\mu\nu}^a + 2 \varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} A^{\alpha a})(\tilde{F}_a^{\mu\nu} + 2 \varepsilon^{\beta\mu\nu 4} A_{\alpha\beta}) = \\ &\equiv \tilde{\mathcal{L}}_{YM} - \varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} \tilde{F}_a^{\mu\nu} A^{\alpha a} - 2(A_\alpha^a A_a^\alpha - A_4^\alpha A_\alpha^4) \end{aligned} \quad (3.112)$$

conține termenii suplimentari,  $-\varepsilon_{\alpha\mu\nu 4} \tilde{F}_a^{\mu\nu} A^{\alpha a} - 2(A_\alpha^a A_a^\alpha - A_4^\alpha A_\alpha^4)$ , absenți în spațiul Minkowski.

În spațiul plat, particula de spin 3/2 este descrisă de lagrangeianul Rarita - Schwinger

$$\tilde{\mathcal{L}}_{RS} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \bar{\psi}_\eta \gamma_5 \gamma_\rho \partial_\mu \psi_\nu \quad (3.113)$$

Așa cum am arătat în primul paragraf al acestui capitol, formularea teoriei pe  $S^3$ , presupune trecerea de la reprezentarea de impuls la reprezentarea de moment cinetic. În consecință, vom înlocui derivatele obișnuite  $\{\partial_\mu\}$  cu operatorii moment cinetic total  $\{J_\mu\}$  dați de relația (3.41), unde operatorii de spin se exprimă în funcție de matricile Dirac  $\{\gamma^\mu\}$  prin

$$S_\mu = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta 4} \Sigma^{\alpha\beta}; \quad \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]. \quad (3.114)$$



Forma  $SU(N)$  gauge - invariantă a lagrangeianului Rarita - Schwinger va fi deci

$$\mathcal{L}_{RS} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \bar{\psi}_\eta \gamma_5 \gamma_\rho D_\mu \psi_\nu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.115)$$

Derivata covariantă

$$D_\mu \psi_\nu = \nabla_\mu \psi_\nu + ig B_\mu \psi_\nu, \quad (3.116)$$

în care am utilizat notația

$$B_\mu = A_\mu^a T_a, \quad a = \overline{1, n}, \quad (3.117)$$

conține derivata covariantă Levi - Civita

$$\nabla_\mu \psi_\nu = e_\mu \psi_\nu + \psi^\rho \Gamma_{\nu\rho\mu} \quad (3.118)$$

Cu aceste considerații, lagrangeianul particulei de spin 3/2 capătă forma explicită

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RS} = & \frac{1}{2} \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \bar{\psi}_\eta \gamma_5 \gamma_\rho \left[ e_\mu \psi_\nu + \varepsilon_{\nu\sigma\mu\lambda} \psi^\sigma - \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi_\nu \right] + \\ & + ig \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \bar{\psi}_\eta \gamma_5 \gamma_\rho \psi_\nu B_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.119)$$

conducând la ecuația Rarita - Schwinger pe  $S^3 \times R$ , în formulare  $SO(3, 1) \times G$  gauge - invariantă,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho (e_\mu + ig B_\mu) \psi_\nu - \frac{7}{2} \gamma_5 \gamma^\mu \psi_\mu \delta_4^\eta + \frac{3}{2} \gamma_5 \gamma_4 \psi^\eta + \\ + \frac{3}{2} \gamma_5 \gamma^\eta \psi_4 + \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_4 \gamma^\eta \gamma^\mu \psi_\mu = 0 \end{aligned} \quad (3.120)$$

Dacă se aplică în mod mecanic, fără a lua în considerare spinul, metoda descrisă de M. Carmeli și S. Malin [4], se obține o ecuație Rarita - Schwinger de tipul

$$\varepsilon^{\eta\rho\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\rho (e_\mu + ig B_\mu) \psi_\nu = 0 \quad (3.121)$$



omităndu-se termenii adiționali

$$T = -\frac{7}{2}\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta_4^\eta + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^\eta + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\eta\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^\eta\gamma^\mu\psi_\mu \quad (3.122)$$

Acesta apare în teorie ca rezultat al acțiunii următoarelor două expresii:

- prima

$$T_S = -\frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta_4^\eta - \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^\eta + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^\eta\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^\eta\gamma^\mu\psi_\mu, \quad (3.123)$$

care în cazul câmpului Dirac devine  $-(3/2)\gamma_5\gamma_4\psi$ , absent la M. Carmeli și S. Malin, exprimă efectele de spin,

- în timp ce a doua

$$T_\Gamma = -2\gamma_5\gamma^\mu\psi_\mu\delta_4^\eta + 2\gamma_5\gamma_4\psi^\eta \quad (3.124)$$

este pur gravitațional.

În ecuația Rarita - Schwinger (3.120) considerăm  $\eta = i$  și avem

$$\varepsilon^{i\rho\mu\nu}\gamma_5\gamma_\rho(e_\mu + igB_\mu)\psi_\nu + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma_4\psi^i + \frac{3}{2}\gamma_5\gamma^i\psi_4 + \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_4\gamma^i\gamma^\mu\psi_\mu = 0 \quad (3.125)$$

iar, pentru  $\eta = 4$ , obținem

$$\varepsilon^{4ijk}\gamma_5\gamma_i(e_j + igB_j)\psi_k - 3\gamma_5\gamma^i\psi_i = 0 \quad (3.126)$$

Rezultatele de mai sus pot fi particularizate pentru diferite cazuri de interes fizic, cum ar fi cel corespunzător grupului  $G$  de tipul  $SU(2)$ ,  $SU(2) \times U(1)$  sau  $SU(3)$ .



# Bibliografie

- [1] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.
- [2] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 175.
- [3] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 185.
- [4] Carmeli, M., and Malin, S., 1985, *Found. Phys.* **15**, 1019.
- [5] Carmeli, M., and Malin, S., 1986, *Found. Phys.* **16**, 791.
- [6] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 193.
- [7] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 407.
- [8] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Found. Phys.* **25**, 957.
- [9] Zet, G., Pasnicu, C., and Agop, M., 1991, *Found. Phys.* **21**, 473.
- [10] Kramers, H.A., 1937, *Proc. Amsterdam Acad.* **40**, 814.
- [11] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. Astron. J.* **7**, (sub  
*tipar*).



# Cuprins

4	CAMPUL ELECTROMAGNETIC	119
4.1	Câmpul Maxwell rotațional simetric . . . . .	119
4.1.1	Ecuațiile Maxwell cu simetrie rotațională pe back-ground $S^3 \times R$ . . . . .	120
4.1.2	Modurile longitudinale de vid . . . . .	123
4.1.3	Modurile transversale rotațional - simetrice ale câmpului Maxwell . . . . .	126
4.2	Radiația efectivă a câmpului electromagnetic . . . . .	131
4.2.1	Etalonul transversal, bidimensional, rotațional simetric . . . . .	132
4.2.2	Soluția generală și expresiile componentelor esențiale ale tensorului electromagnetic . . . . .	134
4.2.3	Radiația efectivă a câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, în Universul $S^3 \times R$ . . . . .	143
4.3	Ecuațiile câmpului electromagnetic pe $S^3 \times R$ în formulă canonică . . . . .	151



## Capitolul 4

# CAMPUL ELECTROMAGNETIC

### 4.1 Câmpul Maxwell rotațional simetric

Scopul acestei analize este de a lua în discuție diferitele soluții analitice ale ecuațiilor Maxwell, în spațiu - timpul  $S^3 \times R$  static [1-3]. Motivația interesului nostru pentru câmpul vectorial nu este numai în scopul de a completa imaginea câmpurilor studiate în paragrafele anterioare, ci constă și în faptul că fotonul este cuanta unui câmp tipic oricărei teorii gauge ce unifică principalele interacțiuni din natură, putând fi ușor generalizat la câmpul Yang - Mills [4].

În continuare, ne vom ocupa de modurile transversale ale câmpul electromagnetic cu simetrie rotațională [1,2]. Metoda folosită conduce, simultan, la două cazuri particulare și anume, la modurile longitudinale de vid și la câmpul electrostatic cu simetrie rotațională, pe  $S^3 \times R$ .



### 4.1.1 Ecuațiile Maxwell cu simetrie rotațională pe background $S^3 \times R$

Vom utiliza parametrizarea (1.177), consistentă cu metrica sferei  $S^3$ , de rază  $a = \text{const.} \in R_+$  ce posedă un grup de mișcare  $G_6 = O(4)$  având vectorii Killing

$$\begin{aligned}
 a) \quad K_{(1)} &= \cos(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin(\alpha + \beta) \left[ \tan \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\
 b) \quad K_{(2)} &= -\sin(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos(\alpha + \beta) \left[ \tan \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\
 c) \quad K_{(3)} &= \cos(\alpha - \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin(\alpha - \beta) \left[ \tan \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\
 d) \quad K_{(4)} &= -\sin(\alpha - \beta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos(\alpha - \beta) \left[ \tan \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \\
 e) \quad K_{(5)} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \\
 f) \quad K_{(6)} &= \frac{\partial}{\partial \beta}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

În acord cu Principiul Cosmologic, considerând  $S^3$  ca o hipersuprafață de timp cosmologic constant, metrica lorentziană a Universului  $S^3$  static se obține, evident, prin adăugarea unei direcții temporale, ortogonale și plate,  $-(dt)^2$  metricii (1.179) care acum posedă, pe lângă vectorii Killing (4.1), unul în plus, *time-like*,

$$K_{(7)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.2}$$

ce corespunde invarianței în raport cu translațiile temporale.

Ca și în cazul capitolelor precedente, vom lucra cu aceeași bază tetrică, satisfăcând algebra (1.186) [5].



O soluție rotațional simetrică a ecuațiilor Maxwell, pe spațiu-timpul  $S^3 \times R$ , înseamnă practic un câmp electromagnetic ce satisface condițiile minimale de simetrie

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} F)^{ik} &= \frac{\partial F^{ik}}{\partial \alpha} \equiv 0 \\ (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \beta}} F)^{ik} &= \frac{\partial F^{ik}}{\partial \beta} \equiv 0; (\forall) i, k = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (4.3)$$

în raport cu vectorii Killing (4.1.e,f), unde

$$F^{ik} = g^{ij} A_{,j}^k - g^{kj} A_{,j}^i - (g^{ij} g_{,j}^{km} - g^{kj} g_{,j}^{im}) A_m \quad (4.4)$$

sunt componentele tensorului electromagnetic  $F$ , în raport cu baza tensorială canonică

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} \right\}_{i,k=\overline{1,4}} \quad (4.5)$$

cu  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \alpha$ ,  $x^3 = \beta$ ,  $x^4 = t$  și prin  $_{,j}$  am notat  $\frac{\partial}{\partial x^j}$ . Astfel, baza canonică va fi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Deoarece orice funcție definită pe  $S^3$  este  $2\pi$ -periodică, în  $\alpha$  și  $\beta$ , vom obține, din (4.3) și (4.4), condițiile suficiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^i}{\partial \alpha} &\equiv 0 \\ \frac{\partial A^i}{\partial \beta} &\equiv 0; (\forall) i = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (4.7)$$



pe care trebuie să le satisfacă potențialul câmpului electromagnetic,  $A$ , pentru a fi rotațional simetric în spațiu - timpul  $S^3 \times R$ .

Astfel, componentele esențiale ale tensorului electromagnetic au expresiile concrete

$$\begin{aligned}
 a) \quad F^{12} &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2 \tan \theta A^2 \right] \\
 b) \quad F^{13} &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2 \cot \theta A^3 \right] \\
 c) \quad F^{14} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t} \\
 d) \quad F^{24} &= \frac{\partial A^2}{\partial t} \\
 e) \quad F^{34} &= \frac{\partial A^3}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

ce aduc ecuațiile Maxwell fără surse

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} F^{ik}] = 0 \tag{4.9}$$

la forma explicită

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t} \right] &= 0 \\
 b) \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\sin \theta \cos \theta}{a^2} \left[ \frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2 \tan \theta A^2 \right] \right\} - \frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} &= 0 \\
 c) \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\sin \theta \cos \theta}{a^2} \left[ \frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2 \cot \theta A^3 \right] \right\} - \frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} &= 0 \\
 d) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t} \right] \right\} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

iar condiția de etalonare Lorentz devine

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \cos \theta A^1] + \frac{\partial A^4}{\partial t} = 0 \tag{4.11}$$



Din (4.10), este ușor de observat că componentele  $A^2$ ,  $A^3$  sunt deja decuplate și de asemenea că ecuațiile (4.10.a,d) și (4.11) conduc la sistemul

$$\begin{aligned} a) \quad A^4 &= V(\theta) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \cos \theta \int A^1 dt \right] \\ b) \quad \frac{1}{a^2} \frac{\partial A^4}{\partial \theta} + \frac{\partial A^1}{\partial t} &= \frac{C}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

unde  $C = \text{const} \in R$ , iar  $V(\theta)$  este potențialul câmpului electrostatic cu simetrie rotațională, în spațiu - timpul (static)  $S^3 \times R$ .

#### 4.1.2 Modurile longitudinale de vid

Înainte de a trece la analiza modurilor transversale  $A^2$ ,  $A^3$ , să investigăm, în detaliu, soluția analitică a sistemului (4.12), deoarece ea va pune în evidență o trăsătură foarte interesantă a câmpului electromagnetic, cu simetrie rotațională, pe topologia  $S^3 \times R$ , și anume, modurile (netriviale) longitudinale, de vid [1,2].

Înlocuind pe (4.12.a) în (4.12.b), obținem pentru componenta  $A^1$  o ecuație integro - diferențială, care, prin derivarea ambilor membri în raport cu timpul, devine

$$\frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin \chi \frac{\partial A^1}{\partial \chi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \chi} A^1 - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} = 0 ; 0 \leq \chi = 2\theta \leq 2\pi \quad (4.13)$$

Cu

$$A^1(\chi, t) = P(\chi)T(t) \quad (4.14)$$



obținem, din (4.13), ecuațiile

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \text{ cu } \omega = \text{const.} \\ b) \quad & \frac{1}{\sin \chi} \frac{d}{d\chi} \left[ \sin \chi \frac{dP}{d\chi} \right] + \left[ \left( \frac{\omega a}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \chi} \right] P = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

și nu este o problemă să remarcăm că se impune ca

$$\omega_l = \frac{2}{a} \sqrt{l(l+1)}; \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

pentru ca (4.15.b) să reprezinte ecuația diferențială a funcțiilor Legendre asociate [6]

$$P_l^1(\cos \chi) = \frac{\sin \chi}{2^l l!} \frac{d^{l+1}}{d(\cos \chi)^{l+1}} [(\cos^2 \chi - 1)^l] \quad (4.17)$$

Aceasta este o condiție de cuantificare pentru o valoare dată a razei  $a$ , și dispăre în spațiul plat, unde  $a \rightarrow \infty$ .

Cu (4.16), soluția lui (4.15.a) este de forma

$$T_l(t) = a_l^1 \exp(-i\omega_l t) + \bar{a}_l^1 \exp(i\omega_l t), \quad a_l^1 \in \mathbb{C} \quad (4.18)$$

și astfel, obținem soluția generală a ecuației (4.13) de forma

$$A^1(\chi, t) = \sum_{l=1}^{\infty} P_l^1(\cos \chi) \left[ a_l^1 \exp(-i\omega_l t) + \bar{a}_l^1 \exp(i\omega_l t) \right] \quad (4.19)$$

Introducând (4.19) în (4.13), avem

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} - \frac{2a^2 C}{\sin \chi} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4i}{\omega_l} \left[ \frac{1}{\sin \chi} \frac{d}{d\chi} (\sin \chi P_l^1) + \left( l(l+1) - \frac{1}{\sin^2 \chi} \right) P_l^1 \right] \\ &\quad \left[ a_l^1 e^{-i\omega_l t} - \bar{a}_l^1 e^{i\omega_l t} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

adică, din cauza lui (4.17), (4.16) și (4.15.b),

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{a^2 C}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (4.21)$$



cu soluția generală

$$V(\theta) = V_0 + a^2 C \ln(\tan \theta) \quad (4.22)$$

unde  $V_0$  poate fi recalibrat la  $V_0 = 0$  în acord cu  $V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Semnificația fizică a constantei  $C$  poate fi dată prin impunerea Teoremei lui Gauss

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E a^2 \sin \theta \cos \theta d\alpha d\beta = Q \quad (4.23)$$

unde  $\epsilon_0 = 1$  (și de asemenea  $\mu_0 = 1$ , adică unități Heaviside).  $Q$  este sarcina electrică reală conținută în domeniul tridimensional, mărginit de suprafața închisă, *space-like*, de  $\theta = \text{const.}$  și  $t = \text{const.}$ , iar

$$E = (F_{14})_\tau \quad (4.24)$$

este intensitatea câmpului electrostatic, cu simetrie rotațională, în raport cu tetradul pseudo-ortonormal

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= e_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \omega^1 = \omega_i^1 dx^i = a d\theta \\ \vec{e}_2 &= e_2^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad \omega^2 = \omega_i^2 dx^i = a \cos \theta d\alpha \\ \vec{e}_3 &= e_3^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \beta}; \quad \omega^3 = \omega_i^3 dx^i = a \sin \theta d\beta \\ \vec{e}_4 &= e_4^i \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \omega^4 = \omega_i^4 dx^i = dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

Astfel,

$$(F_{14})_\tau = e_1^i e_4^k g_{il} g_{km} F^{lm} = e_1^1 e_4^4 g_{11} g_{44} F^{14} \quad (4.26)$$

și, utilizând (4.8.c) și (4.12.b), obținem

$$E = -\frac{aC}{\sin \theta \cos \theta} \quad (4.27)$$



care conduce, din (4.23), la expresia lui  $C$  în funcție de sarcina electrică reală  $Q$  și raza  $a$  a sferei  $S^3$ :

$$C = -\frac{Q}{4\pi^2 a^3} \quad (4.28)$$

Intensitatea (4.27) și potențialul (4.22) ale câmpului electrostatic, cu simetrie rotațională, în Universul  $S^3 \times R$ , capătă expresiile concrete

$$\begin{aligned} a) \quad E &= \frac{Q}{2\pi^2 a^2 \sin(2\theta)} \\ b) \quad V(\theta) &= -\frac{Q}{4\pi^2 a} \ln(\tan \theta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

și reprezintă, din punct de vedere fizic, analogul expresiilor bine-cunoscute pentru un câmp electrostatic, cu simetrie sferică, generat de o sarcină punctuală  $Q$ , în spațiul Minkowski.

Acum, considerând  $Q = 0$  și introducând (4.19) în (4.12.a), obținem expresia componentei  $A^4$

$$A^4(\chi, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i}{\omega_l} \left[ P_l^1(\cos \chi) - 2 \cot \chi P_l^1(\cos \chi) \right] \left[ a_l^1 \exp(-i\omega_l t) - \bar{a}_l^1 \exp(i\omega_l t) \right] \right\} \quad (4.30)$$

ce corespunde, împreună cu  $A^1$  dat de (4.19), modurilor longitudinale (netriviale) de vid (deoarece  $F^{14} \equiv 0$ ) ale câmpului electromagnetic, cu simetrie rotațională, pe topologia  $S^3 \times R$ .

### 4.1.3 Modurile transversale rotațional - simetrice ale câmpului Maxwell

După analiza de mai sus, ajungem, în sfârșit, la obiectivul principal al acestui paragraf și anume, modurile transversale rotațional simetrice,



observabile,  $A^2$ ,  $A^3$ , ale câmpului electromagnetic, pe  $S^3 \times R$  [1,2].

Utilizând variabila

$$x = \cos(2\theta) \quad (4.31)$$

ecuațiile de câmp (4.10.b,c) devin respectiv

$$\begin{aligned} a) \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 A^2}{\partial x^2} + (1-3x) \frac{\partial A^2}{\partial x} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} - A^2 &= 0 \\ b) \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 A^3}{\partial x^2} - (1+3x) \frac{\partial A^3}{\partial x} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} - A^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

și pot fi scrise într-o expresie unică

$$(1-2z) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (1-3z) \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - A = 0 \quad (4.33)$$

deoarece, pentru  $z = x$

$$A(z, t) = A^2(x, t) \quad (4.34)$$

iar, pentru  $z = -x$

$$A(z, t) = A^3(x, t) \quad (4.35)$$

Cu ajutorul substituției Fourier

$$A(z, t) = Z(z)T(t), \quad (4.36)$$

ecuația (4.33) se descompune în ecuațiile diferențiale, liniare, ordinare

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T &= 0; \quad \omega = \text{const.} \\ b) \quad (1-z^2) \frac{d^2 Z}{dz^2} + (1-3z) \frac{dZ}{dz} + \left[ \left( \frac{\omega a}{2} \right)^2 - 1 \right] Z &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$



unde (4.37.b) reprezintă o formă particulară a ecuației diferențiale

$$(1-z^2) \frac{d^2 Z}{dz^2} + [(b-a) - (b+a+2)z] \frac{dZ}{dz} + n(n+b+a+1)Z = 0, \quad (4.38)$$

cu  $a, b > -1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , satisfăcută de polinoamele Jacobi

$$Z(z) = P_n^{(a,b)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-a} (1+z)^{-b} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n+a} (1+z)^{n+b}] \quad (4.39)$$

Comparând ecuațiile (3.37.b) și (3.38), rezultă imediat coeficienții  $a$  și  $b$  ca fiind

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Astfel, ecuația (3.37.b) posedă soluția polinomială (regulată), pe  $[-1, 1]$

$$Z(z) = P_n^{(0,1)}(z) \quad (4.41)$$

pentru

$$\omega_n = \frac{2}{a}(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

Introducând, pentru fiecare  $n \in N$ , valoarea (4.42) a lui  $\omega$  în (3.37.a), obținem soluția

$$T_n(t) = c_n \exp(-i\omega_n t) + \bar{c}_n \exp(i\omega_n t) \quad (4.43)$$

care conduce, împreună cu (4.41) și (4.36), la soluția (serială) generală a lui (4.33), și anume

$$A(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(z) [c_n \exp(-i\omega_n t) + \bar{c}_n \exp(i\omega_n t)] \quad (4.44)$$



Astfel, utilizând relațiile (4.34), (4.35), (4.31), și proprietatea de simetrie a polinoamelor Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(-x) = (-1)^n P_n^{(b,a)}(x) \quad (4.45)$$

am obținut, prin metode analitice, componentele "active"

$$\begin{aligned} a) \quad A^2(\theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{-i\omega t} \right] \\ b) \quad A^3(\theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{-i\omega t} \right], \quad (4.46) \end{aligned}$$

cu  $\{a_n^2, a_n^3\}_{n=0}^{\infty} \in C$ , ale 4 - potențialului  $A$ , pentru câmpul electromagnetic, cu simetrie rotațională, fără surse (extinse spațial), în Universul  $S^3 \times R$ .

Componentele esențiale ale tensorului electromagnetic poate fi obținut direct din relațiile (4.8.a,b,d,e), utilizând soluția (4.46), adică

$$\begin{aligned} F^{12} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) - 2 \tan \theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \right) \right] \\ &\quad \left[ a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t} \right] \\ F^{13} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) + 2 \cot \theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \right) \right] \\ &\quad \left[ a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t} \right] \\ F^{24} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^2 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t} \right] \\ F^{34} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^3 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t} \right] \quad (4.47) \end{aligned}$$

și, exploatând relația de transformare

$$F_{ab} = \frac{1}{2} c_{[a}^i c_{b]}^k g_{il} g_{km} F^{lm} ; 1 \leq a < b \leq 4 \quad (4.48)$$



unde parantezele pătrate reprezintă simpla antisimetrizare (fără factorul  $1/2$ ), iar  $\{e_a\}_{a=1,4}$  este tetradul pseudo-ortonormal (4.25).

Obținem astfel componentele "tetradice" care sunt în relație directă (la fel ca pe spațiul minkowskian) cu intensitatea câmpului electric  $E$  și cu inducția,  $B$ , a câmpului magnetic

$$\begin{aligned} E_2 &= (F_{24})_\tau \\ E_3 &= (F_{34})_\tau \\ B_2 &= (F_{31})_\tau \\ B_3 &= (F_{12})_\tau \end{aligned} \quad (4.49)$$

Astfel, în raport cu triadul orto-normal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  din (4.25), structura câmpului electromagnetic analizat, cu simetrie rotațională pe background  $S^3 \times R$ , este descris complet de componentele

$$\begin{aligned} E_2 &= i \sum_{n=0}^{\infty} (a\omega_n) \cos \theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^2 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t} \right] \\ E_3 &= i \sum_{n=0}^{\infty} (a\omega_n) \sin \theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[ a_n^3 e^{-i\omega_n t} - \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t} \right] \\ B_2 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \right) + 2 \cos \theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \right] \\ &\quad \left[ a_n^3 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^3 e^{i\omega_n t} \right] \\ B_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \cos \theta \frac{d}{d\theta} \left( P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \right) - 2 \sin \theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \right] \\ &\quad \left[ a_n^2 e^{-i\omega_n t} + \bar{a}_n^2 e^{i\omega_n t} \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

ale vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , modurile posedând spectrul liniar (4.42).

În concluzie, ecuațiile Maxwell în cazul simetriei rotaționale a câmpului electromagnetic, în Universul Einstein, pot fi rezolvate, și prezintă



diferențe majore față de cazul minkowskian. Spectrul modurilor longitudinale și transversale este diferit, datorită curburii. În particular, modurile de vid longitudinale pot fi tratate simultan cu câmpul electrostatic rotațional simetric. Evident, condițiile de cuantificare (4.16) și (4.42) dispar la trecerea pe spațiul plat, când  $a \rightarrow \infty$ .

## 4.2 Radiația efectivă a câmpului electromagnetic

O caracteristică incitantă care s-a desprins din analiza făcută în primul paragraf fiind absența radiației efective a câmpului, ne propune ca, în cele ce urmează, să ne focalizăm atenția asupra modurilor radiative, complementare, cu simetrie rotațională.

Lucrând într-un gauge convenabil, vom elimina modurile longitudinale și vom reduce condiția Lorentz de etalonare la un gauge transversal bidimensional. În acest context, integrând ecuațiile Maxwell, vom obține componentele esențiale ale tensorului electromagnetic și ale vectorului Umov - Poynting, precum și densitatea de energie. În final, vom alege ca aplicație concretă, cazul particular al modurilor excitate *left* - și *right* - *moving* corespunzătoare lui  $(n = 0; m = m' = 1)$  [3].



### 4.2.1 Etalonul transversal, bidimensional, rotațional simetric

Utilizând aceeași parametrizare, (1.177) și metrică lorentziană (1.179), vom obține, în cele ce urmează, soluția de gauge transversal, bidimensional, corespunzătoare modurilor radiative complementare, cu simetrie rotațională, ale câmpului electromagnetic pe background  $S^3 \times R$ .

Vom impune etalonul

$$A^1 = A^4 = 0 \quad (4.51)$$

care reduce condiția de etalonare Lorentz

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} A^i) = 0 \quad (4.52)$$

la așa numita condiție de gauge transversal

$$\frac{\partial A^2}{\partial \alpha} + \frac{\partial A^3}{\partial \beta} = 0, \quad (4.53)$$

unde toate componentele 4 - potențialului  $A$  sunt considerate în raport cu baza canonică (4.6). Cea mai simplă "soluție", netrivială a condiției (4.53) este

$$\frac{\partial A^2}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^3}{\partial \beta} = 0 \quad (4.54)$$

adică

$$\begin{aligned} A^2 &= A^2(\theta, \beta, t) \\ A^3 &= A^3(\theta, \alpha, t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

reprezentând practic simetria rotațională, complementară, a potențialului electromagnetic, în Universul static  $S^3 \times R$ .



În aceste condiții, componentele contravariante (4.4) ale tensorului electromagnetic, capătă următoarele expresii simplificate

$$\begin{aligned}
 a) \quad F^{12} &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2 \tan \theta A^2 \right] \\
 b) \quad F^{13} &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2 \cot \theta A^3 \right] \\
 c) \quad F^{23} &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial A^3}{\partial \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A^2}{\partial \beta} \right] \\
 d) \quad F^{24} &= \frac{\partial A^2}{\partial t} \\
 e) \quad F^{34} &= \frac{\partial A^3}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

aducând ecuațiile Maxwell (4.9) la forma concretă

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{\partial A^2}{\partial \theta} - 2 \tan \theta A^2 \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A^2}{\partial \beta^2} - a^2 \frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} = 0 \\
 &\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{\partial A^3}{\partial \theta} + 2 \cot \theta A^3 \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A^3}{\partial \beta^2} - a^2 \frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} = 0 \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

celelalte două ecuații, pentru  $i = 1$  și  $i = 4$ , reducându-se automat la identitatea trivială  $0 = 0$ .



### 4.2.2 Soluția generală și expresiile componentelor esențiale ale tensorului electromagnetic

Ca de obicei când lucrăm în coordonate sferice, vom introduce variabila (4.31) și vom obține pentru (4.57) expresiile echivalente

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (1-x^2) \frac{\partial^2 A^2}{\partial x^2} + (1-3x) \frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{1/2}{1-x} \frac{\partial^2 A^2}{\partial \beta^2} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2} - A^2 = 0 \\ \text{b)} \quad & (1-x^2) \frac{\partial^2 A^3}{\partial x^2} - (1+3x) \frac{\partial A^3}{\partial x} + \frac{1/2}{1-x} \frac{\partial^2 A^3}{\partial \alpha^2} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A^3}{\partial t^2} - A^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

pe care putem să le scriem comprimat ca

$$(1-z^2) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (1-3z) \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1/2}{1-z} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} - \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - A^2 = 0 \quad (4.59)$$

deoarece, pentru  $z = x$  și  $\varphi = \beta$ , avem

$$A(z, \varphi, t) = A^2(x, \beta, t) \quad (4.60)$$

iar, pentru  $z = -x$  și  $\varphi = \alpha$  avem

$$A(z, \varphi, t) = A^3(x, \alpha, t) \quad (4.61)$$

Pentru a integra ecuația (4.59), vom aplica substituția Fourier

$$A(z, \varphi, t) = Z(z) \Phi(\varphi) T(t) \quad (4.62)$$

obținând pentru (4.59) următoarele ecuații diferențiale, liniare, ordinare

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \\ \text{b)} \quad & \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 \Phi = 0 \\ \text{c)} \quad & (1-z^2) \frac{d^2 Z}{dz^2} + (1-3z) \frac{dZ}{dz} + \left[ \left( \frac{\omega a}{2} \right)^2 - 1 - \frac{\mu^2}{1-z} \right] Z = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$



unde  $\mu = k^2/2$  și, pentru moment,  $\omega, k \in \mathbb{R}$ .

Datorită faptului că  $\varphi$  este coordonată azimutală, soluția fundamentală

$$\Phi(\varphi) = \exp(ik\varphi) \quad (4.64)$$

al lui (4.63.b) trebuie să fie  $2\pi$ -periodică, și astfel  $ik \in \mathbb{Z}$ . Pentru a integra (4.63.c), observă că  $z = 1$  este un punct singular al funcției

$$f(z) = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 - \frac{\mu}{1-z} \quad (4.65)$$

și de aceea soluția  $Z(z)$  trebuie căutată de forma

$$Z(z) = (1-z)^\nu U(z), \quad \nu \in \mathbb{R} \quad (4.66)$$

Acum, introducând pe (4.66) în (4.63.c), ajungem la ecuația

$$\begin{aligned} & (1-z^2) \frac{d^2 U}{dz^2} + [(1-2\nu) - (3+2\nu)z] \frac{dU}{dz} + \\ & + \left[ \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{[\nu(\nu-2) - \mu^2] + \nu(\nu+2)z}{1-z} \right] U = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

care ne permite să eliminăm singularitatea  $z = 1$  din

$$g(z) = \left(\frac{\omega a}{2}\right)^2 - 1 + \frac{[\nu(\nu-2) - \mu^2] + \nu(\nu+2)z}{1-z} \quad (4.68)$$

prin condiția

$$2\nu^2 = \mu^2 \Leftrightarrow \nu^2 = (k/2)^2 \quad (4.69)$$

Deoarece pentru  $\nu < 0$  soluția (4.66) diverge în  $z = 1$  (cel puțin pentru  $U(1) \neq 0$ ), vom selecta numai

$$\nu = \frac{1}{2}|k| \quad (4.70)$$



și (4.67) devine

$$(1 - z^2) \frac{d^2 U}{dz^2} + [(1 - |k|) - (3 + |k|)z] \frac{dU}{dz} + \left[ \left( \frac{\omega a}{2} \right)^2 - 1 - \frac{|k|}{2} \left( \frac{|k|}{2} + 2 \right) \right] U = 0. \quad (4.71)$$

Comparând (4.71) cu ecuația (4.38) a polinoamelor Jacobi (4.39), rezultă coeficienții

$$\begin{aligned} a &= |k| \\ b &= 1 \end{aligned} \quad (4.72)$$

precum și spectrul

$$\omega_{n|k|} = \frac{2}{a} \left[ n + 1 \frac{|k|}{2} \right] \quad (4.73)$$

al modurilor staționare

$$U_{n|k|}(z) = P_n^{(|k|,1)}(z) \quad (4.74)$$

$$T_{nk}(t) = a_{nk} \exp(-i\omega_{n|k|}t) + b_{nk} \exp(i\omega_{n|k|}t); \{a_{nk}, b_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}}^{k \in \mathbb{Z}} \in C$$

Din (4.62,64,65) și (4.74) obținem forma explicită a soluției generale a ecuației (4.59)

$$A(z, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ (1 - z)^{\frac{|k|}{2}} P_n^{(|k|,1)} \left[ a_{nk} e^{-i\omega_{n|k|}t} + b_{nk} e^{i\omega_{n|k|}t} \right] e^{ik\varphi} \right\} \quad (4.75)$$

care mai poate fi scrisă ca

$$\begin{aligned} A(z, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1 - z)^{\frac{|k|}{2}} P_n^{(|k|,1)} \right. \\ &\quad \left[ a_{nk} e^{i(k\varphi - \omega_{n|k|}t)} + b_{n(-k)} e^{-i(k\varphi - \omega_{n|k|}t)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{n(-k)} e^{-i(k\varphi + \omega_{n|k|}t)} + b_{nk} e^{i(k\varphi + \omega_{n|k|}t)} \right] \left. \right\} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(z) \left[ a_{n0} e^{-i\omega_{n0}t} + b_{n0} e^{i\omega_{n0}t} \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$



unde ultimul termen din membrul drept exprimă modurile transversale, rotațional simetrice, deduse în paragraful precedent. Deoarece  $A(z, \varphi, t)$  trebuie să fie o funcție reală, adică

$$A(z, \varphi, t) = \bar{A}(z, \varphi, t), \quad (4.77)$$

obținem pentru coeficienții complexi  $\{a_{nk}, b_{nk}\}_{n \in N}^{k \in Z}$  relațiile algebrice

$$\begin{aligned} b_{n(-k)} &= \bar{a}_{nk} \\ k &\in N \\ a_{n(-k)} &= \bar{b}_{nk} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Astfel, din (4. 60,61,78) și (4.76), rezultă expresiile complete

$$\begin{aligned} A^2(\theta, \beta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{Z_{nm}^{(-)}(\theta) [L_n^m(\beta, t) + R_n^m(\beta, t)]\} + A_{(0)}^2(\theta, t) \\ A^3(\theta, \alpha, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{Z_{nm}^{(+)}(\theta) [L_n^m(\alpha, t) + R_n^m(\alpha, t)]\} + A_{(0)}^3(\theta, t) \end{aligned} \quad (4.79)$$



cu

$$Z_{nm}^{(-)}(\theta) = (\sin \theta)^m P_n^{(m,1)}(\cos(2\theta))$$

$$Z_{nm}^{(+)}(\theta) = (\cos \theta)^m P_n^{(1,m)}(\cos(2\theta))$$

$$L_n^m(\beta, t) = a_{nm}^2 \exp[i(m\beta - \omega_{nm}t)] + \bar{a}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta - \omega_{nm}t)]$$

$$L_n^{m'}(\alpha, t) = a_{nm'}^3 \exp[i(m/\alpha - \omega_{nm'}t)] + \bar{a}_{nm'}^3 \exp[-i(m/\alpha - \omega_{nm'}t)]$$

$$R_n^m(\beta, t) = \bar{b}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta + \omega_{nm}t)] + b_{nm}^2 \exp[i(m\beta + \omega_{nm}t)]$$

$$R_n^{m'}(\alpha, t) = \bar{b}_{nm'}^3 \exp[-i(m/\alpha + \omega_{nm'}t)] + b_{nm'}^3 \exp[i(m/\alpha + \omega_{nm'}t)]$$

$$A_{(0)}^2(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) [c_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t)]$$

$$A_{(0)}^3(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) [c_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t)] \quad (4.80)$$

pentru componentele rotațional simetrice ale potențialului electromagnetic, în Universul static  $S^3 \times R$ .

În ceea ce privește componentele esențiale ale tensorului electromagnetic  $F$ , acestea se pot calcula direct din (4.101,102) și sunt de



forma

$$\begin{aligned}
 F^{12} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{X_{nm}(\theta)[L_n^m(\beta, t) + R_n^m(\beta, t)]\} + F_{(0)}^{12} \\
 F^{13} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \{W_{nm'}(\theta)[L_n^{m'}(\alpha, t) + R_n^{m'}(\alpha, t)]\} + F_{(0)}^{13} \\
 F^{23} &= \frac{i}{a^2 \cos^2 \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \{m' Z_{nm'}^{(+)}(\theta)[\tilde{L}_n^{m'}(\alpha, t) - \tilde{R}_n^{m'}(\alpha, t)]\} - \\
 &\quad - \frac{i}{a^2 \sin^2 \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{m Z_{nm}^{(-)}(\theta)[\tilde{L}_n^m(\beta, t) - \tilde{R}_n^m(\beta, t)]\} \\
 F^{24} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{\omega_{nm} Z_{nm}^{(-)}(\theta)[\tilde{L}_n^m(\beta, t) + \tilde{R}_n^m(\beta, t)]\} + F_{(0)}^{24} \\
 F^{34} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \{\omega_{nm'} Z_{nm'}^{(+)}(\theta)[\tilde{L}_n^{m'}(\alpha, t) + \tilde{R}_n^{m'}(\alpha, t)]\} + F_{(0)}^{34}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

unde

$$\begin{aligned}
 X_{nm}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(Z_{nm}^{(-)}(\theta)) - 2 \tan \theta \cdot Z_{nm}^{(-)} \\
 W_{nm'}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(Z_{nm'}^{(+)}(\theta)) + 2 \cot \theta \cdot Z_{nm'}^{(+)} \\
 \tilde{L}_n^m(\beta, t) &= a_{nm}^2 \exp[i(m\beta - \omega_{nm}t)] - \bar{a}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta - \omega_{nm}t)] \\
 \tilde{L}_n^{m'}(\alpha, t) &= a_{nm'}^3 \exp[i(m'\alpha - \omega_{nm'}t)] - \bar{a}_{nm'}^3 \exp[-i(m'\alpha - \omega_{nm'}t)] \\
 \tilde{R}_n^m(\beta, t) &= \bar{b}_{nm}^2 \exp[-i(m\beta + \omega_{nm}t)] - b_{nm}^2 \exp[i(m\beta + \omega_{nm}t)] \\
 \tilde{R}_n^{m'}(\alpha, t) &= \bar{b}_{nm'}^3 \exp[-i(m'\alpha + \omega_{nm'}t)] - b_{nm'}^3 \exp[i(m'\alpha + \omega_{nm'}t)]
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

iar componentele  $F_{(0)}^{12}$ ,  $F_{(0)}^{13}$ ,  $F_{(0)}^{24}$ ,  $F_{(0)}^{34}$ , ce corespund chiar câmpului electromagnetic, cu simetrie rotațională, analizat în primul paragraf, sunt



cele din (4.56) generate doar de  $A_{(0)}^2(\theta, t)$ ,  $A_{(0)}^3(\theta, t)$

$$\begin{aligned}
 F_{(0)}^{12} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{d\theta}{d\theta} \left( P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \right) - 2 \tan \theta P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[ c_{n0}^2 \exp(-i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t) \right] \right\} \\
 F_{(0)}^{13} &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{d\theta}{d\theta} \left( P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \right) + 2 \cot \theta P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[ c_{n0}^3 \exp(-i\omega_{n0}t) + \bar{c}_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t) \right] \right\} \\
 F_{(0)}^{24} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \omega_{n0} P_n^{(0,1)}(\cos(2\theta)) \left[ c_{n0}^2 \exp(-i\omega_{n0}t) - \bar{c}_{n0}^2 \exp(i\omega_{n0}t) \right] \right\} \\
 F_{(0)}^{34} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \omega_{n0} P_n^{(1,0)}(\cos(2\theta)) \left[ c_{n0}^3 \exp(-i\omega_{n0}t) - \bar{c}_{n0}^3 \exp(i\omega_{n0}t) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.83}$$

Înainte de a trece mai departe, să observăm că, omițând în (4.79) componentele rotaționale simetrice  $A_{(0)}^2, A_{(0)}^3$ , soluțiile complementare, cu simetrie rotațională,  $A^2(\theta, \beta, t)$ ,  $A^3(\theta, \alpha, t)$  reprezintă, din punct de vedere fizic, superpoziția liniară a modurilor *left-moving* și *right-moving*, de polarizare  $\alpha$  și respectiv  $\beta$ , corespunzătoare frecvențelor pozitive și negative. De aceea, în sensul electrodinamicii cuantice, semnificația amplitudinilor  $\{a_{nk}^A, \bar{a}_{nk}^A \mid A=2 \Rightarrow k=m; A=3 \Rightarrow k=m'\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  și  $\{\bar{b}_{nk}^A, b_{nk}^A \mid A=2 \Rightarrow k=m; A=3 \Rightarrow k=m'\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  va fi practic una operatorială, adică

$a_{nm}^2$  operator de anihilare pentru fotonii *left-moving*, cu polarizare  $\alpha$ , momentul unghiular  $m$  și energia  $\frac{2}{a} \left( n + 1 + \frac{m}{2} \right)$

$\bar{a}_{nm}^2$  operator de creare asociat algebric lui  $a_{nm}^2$

$\bar{b}_{nm}^2$  operator de anihilare pentru fotonii *right-moving*, cu polarizare  $\alpha$ , momentul unghiular  $-m$  și energia  $\frac{2}{a} \left( n + 1 + \frac{m}{2} \right)$



$b_{nm}^2$  operator de creare asociat algebric lui  $\bar{b}_{nm}^2$

$a_{nm}^3$  operator de anihilare pentru fotonii *left - moving*, cu polarizare  $\beta$ , momentul unghiular  $m'$  și energia  $\frac{2}{a} \left( n + 1 + \frac{m'}{2} \right)$

$\bar{a}_{nm}^3$  operator de creare asociat algebric lui  $a_{nm}^3$

$\bar{b}_{nm}^3$  operator de anihilare pentru fotonii *right - moving*, cu polarizare  $\beta$ , momentul unghiular  $-m'$  și energia  $\frac{2}{a} \left( n + 1 + \frac{m'}{2} \right)$

$b_{nm}^3$  operator de creare asociat algebric lui  $\bar{b}_{nm}^3$

După această digresiune, să ne întoarcem la aspectele clasice și să efectuăm transformarea

$$\underline{F}_{ab} = \frac{1}{2} e_{[a}^i e_{b]}^k g_{il} g_{km} F^{lm}; \quad 1 \leq a < b \leq 4 \quad (4.84)$$

a componentelor esențiale  $F^{lm}$ , date de (4.81), în raport cu reperul natural (4.6), la componentele esențiale  $\underline{F}_{ab}$  ale tensorului electromagnetic, în raport cu baza tetradică pseudo - ortonormală (4.25).

Deoarece în reperul rigid (4.25) componentele  $\underline{F}_{ab}$  sunt în "corespondență minkowskiană" cu componentele ortonormale  $E_\mu$  și  $B_\mu$  ale intensității câmpului electric și respectiv ale inducției magnetice (lucrând în unități Heaviside), adică

$$\begin{aligned} E_\mu &= \underline{F}_{\mu 4} \\ B_\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon_\mu^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \varepsilon_\mu^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\lambda} \delta^{\sigma\eta} \varepsilon_{\mu\lambda\eta}; \quad \varepsilon_{123} = 1 \end{aligned} \quad (4.85)$$



vom obține expresiile vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  ca fiind

$$\begin{aligned} E_2 &= -a \cos \theta F^{24} \\ E_3 &= -a \sin \theta F^{34} \\ B_1 &= a^2 \sin \theta \cos \theta F^{23} \\ B_2 &= -a^2 \sin \theta F^{13} \\ B_3 &= a^2 \cos \theta F^{12} \end{aligned} \quad (4.86)$$

ceea ce ne permite estimarea de tip minkowskian

$$\begin{aligned} S_\mu &= \varepsilon_\mu^{\alpha\beta} E_\alpha B_\beta \\ w &= \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} [E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta] \end{aligned} \quad (4.87)$$

Concret, componentele  $\{S_\mu\}_{\mu=1,3}$  ale vectorului Umov - Poynting și densitatea de energie  $w$ , corespunzătoare câmpului electromagnetic cu 4-potențialul  $A$ , complementar rotațional simetric, în Universul Einstein, au forma

$$\begin{aligned} S_1 &= -a^3 [\cos^2 \theta F^{12} F^{24} + \sin^2 \theta F^{13} F^{34}] \\ S_2 &= -a^3 \sin^2 \theta \cos \theta F^{23} F^{34} \\ S_3 &= a^3 \sin \theta \cos^2 \theta F^{23} F^{24} \\ w &= \frac{a^2}{2} \left\{ \cos^2 \theta [a^2 (F^{12})^2 + (F^{24})^2] + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta [a^2 (F^{13})^2 + (F^{34})^2] + a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (F^{23})^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.88)$$



### 4.2.3 Radiația efectivă a câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, în Universul $S^3 \times R$

Radiația care conduce la prezența unor componente nenule ale impulsului câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, pe background  $S^3 \times R$ , se numește radiație efectivă. Din punct de vedere matematic, ea corespunde acelor părți ale componentelor esențiale ale vectorului Umov - Poynting, care sunt rotațional simetrice și independente de timp.

Pentru a explica semnificația acestei definiții, să investigăm dacă  $S_1$ , dat de (4.88.a) și (4.81.a,b,d,e) împreună cu (4.82), reprezintă radiație efectivă, în lungul direcției  $\theta$ .

Deoarece, în (4.88), contribuțiile modurilor  $\alpha$ - și  $\beta$ -polarizate sunt deja decuplate, este suficient să analiză, de exemplu, termenul

$$S_1^{(2)} = -a^3 \cos^2 \theta F^{12} F^{24}, \quad (4.89)$$

adică

$$S_1^{(2)} = i \cos^2 \theta \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1, m_2=1}^{\infty} \left( n_2 + 1 + \frac{m_2}{2} \right) X_{n_1 m_2}(\theta) Z_{n_2 m_2}^{(-)}(\theta) \\ \left[ L_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{L}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) + L_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{R}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) \right. \\ \left. + R_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{L}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) + R_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{R}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) \right] \quad (4.90)$$

unde nu au fost luate în considerare contribuțiile

$$-a^3 \cos^2 \theta \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} X_{n_1 m_1}(\theta) \left[ L_{n_1}^{m_1}(\beta, t) + R_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \right] \right\} F_{(0)}^{24}, \quad (4.91)$$



$$-a^3 \cos^2 \theta \left\{ -i \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{2}{a} (n_2 + 1 + m_2) \right. \\ \left. Z_{n_2 m_2}^{(-)}(\theta) \left[ L_{n_2}^{m_2}(\beta, t) + \tilde{R}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) \right] \right\} F_{(0)}^{12}, \quad (4.92)$$

$$-a^3 \cos^2 \theta F_{(0)}^{12} F_{(0)}^{24} \quad (4.93)$$

deoarece nici una dintre ele nu este nici rotațional simetrică, nici independentă de timp.

Pentru a afla răspunsul este suficient să ne focalizăm, din nou, numai pe termenii  $L\tilde{L}$  și  $L\tilde{R}$ , deoarece situația va fi similară și pentru  $R\tilde{R}$  și  $R\tilde{L}$ .

Considerând termenul  $L\tilde{L}$  din (4.89), avem

(4.94)

$$L_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{L}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) = \\ = \left[ a_{n_1 m_1} e^{i(m_1 \beta - \frac{2}{a}(n_1+1+\frac{m_1}{2})t)} + \bar{a}_{n_1 m_1} e^{-i(m_1 \beta - \frac{2}{a}(n_1+1+\frac{m_1}{2})t)} \right] \\ \left[ a_{n_2 m_2} e^{i(m_2 \beta - \frac{2}{a}(n_2+1+\frac{m_2}{2})t)} - \bar{a}_{n_2 m_2} e^{-i(m_2 \beta - \frac{2}{a}(n_2+1+\frac{m_2}{2})t)} \right] = \\ = a_{n_1 m_1} a_{n_2 m_2} \exp \left\{ i \left[ (m_1 + m_2) \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 + n_2 + 2 + \frac{m_1 + m_2}{2} \right) t \right] \right\} - \\ - a_{n_1 m_1} \bar{a}_{n_2 m_2} \exp \left\{ i \left[ (m_1 - m_2) \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 - n_2 + \frac{m_1 - m_2}{2} \right) t \right] \right\} + \\ + \bar{a}_{n_1 m_1} a_{n_2 m_2} \exp \left\{ -i \left[ (m_1 - m_2) \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 - n_2 + \frac{m_1 - m_2}{2} \right) t \right] \right\} - \\ - \bar{a}_{n_1 m_1} \bar{a}_{n_2 m_2} \exp \left\{ -i \left[ (m_1 + m_2) \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 + n_2 + 2 + \frac{m_1 + m_2}{2} \right) t \right] \right\}$$

Cum  $n_1, n_2 \geq 0$  și  $m_1, m_2 \geq 1$ , este clar că primul și ultimul termen din (4.94) nu pot fi rotațional simetrici și independenți de timp și de



aceea, integrarea lor, în raport cu  $\beta$  de la 0 la  $2\pi$ , și apoi medierea în raport cu timpul cosmic, vor conduce la un rezultat nul. Cât privește termenii al doilea și al treilea, ei sunt independenți de  $\beta$  și  $t$ , atunci când  $m_1 = m_2$  și  $n_1 = n_2$ . Apoi,

$$-|a_{n_1 m_1}|^2 + |\bar{a}_{n_1 m_1}|^2 \equiv 0 \quad (4.95)$$

și astfel, nu există radiație efectivă datorată modurilor *left - moving*  $L\tilde{L}$ . Desigur, același lucru putem spune și despre contribuția  $R\tilde{R}$  a modurilor *right - moving*.

În ceea ce privește termenul  $L\tilde{R}$ , avem

$$\begin{aligned} & L_{n_1}^{m_1}(\beta, t) \tilde{R}_{n_2}^{m_2}(\beta, t) = \\ & = \left\{ a_{n_1 m_1} \exp \left[ i \left( m_1 \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 + 1 + \frac{m_1}{2} \right) t \right) \right] + \right. \\ & + \bar{a}_{n_1 m_1} \exp \left[ -i \left( m_1 \beta - \frac{2}{a} \left( n_1 + 1 + \frac{m_1}{2} \right) t \right) \right] \left. \right\} + \\ & \left\{ \bar{b}_{n_2 m_2} \exp \left[ -i \left( m_2 \beta + \frac{2}{a} \left( n_2 + 1 + \frac{m_2}{2} \right) t \right) \right] + \right. \\ & - b_{n_2 m_2} \exp \left[ i \left( m_2 \beta + \frac{2}{a} \left( n_2 + 1 + \frac{m_2}{2} \right) t \right) \right] \left. \right\} \quad (4.96) \end{aligned}$$

și este simplu să observă că, în (4.96), nu există independență simultană de  $\beta$  și  $t$ . Desigur, câmpul electromagnetic cu gauge transversal, bidimensional, în Universul static  $S^3 \times R$ , nu prezintă radiație efectivă pe direcția lui  $\theta$ .

Să ne ocupăm acum de componenta  $S_2$  a vectorului Umov - Poynting,



care devine

$$\begin{aligned}
 S_2 = & -a^3 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 & \left\{ \frac{i}{a^2 \cos^2 \theta} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1'=1}^{\infty} m_1' Z_{n_1 m_1'}^{(+)}(\theta) [\tilde{L}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) - \tilde{R}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t)] - \right. \\
 & - \frac{i}{a^2 \cos^2 \theta} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1 Z_{n_1 m_1}^{(-)}(\theta) [\tilde{L}_{n_1}^{m_1}(\beta, t) - \tilde{R}_{n_1}^{m_1}(\beta, t)] \left. \right\} \\
 & \left\{ -i \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_2'=1}^{\infty} \frac{2}{a} \left( n_2 + 1 + \frac{m_2'}{2} \right) Z_{n_2 m_2'}^{(+)}(\theta) \right. \\
 & \left. [\tilde{L}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t) + \tilde{R}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t)] + F_{(0)}^{34} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Din discuția de mai sus, observăm că modurile *left-moving* și *right-moving*, de polarizare  $\alpha$  și respectiv  $\beta$ , și de asemenea termenul  $F_{(0)}^{34}$  nu vor aduce nici o contribuție la radiația efectivă, în direcția  $\alpha$ . Astfel, notând cu  $S_r^{(r)}$  partea de radiație efectivă a lui  $S_2$ , avem

$$\begin{aligned}
 S_2^{(r)} = & -2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1', m_2'=1}^{\infty} m_1' \left( n_2 + 1 + \frac{m_2'}{2} \right) \\
 & Z_{n_1 m_1'}^{(+)}(\theta) Z_{n_2 m_2'}^{(+)}(\theta) [\tilde{L}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) - \tilde{R}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t)] [\tilde{L}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t) + \tilde{R}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t)]
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

ceea ce înseamnă

$$\begin{aligned}
 S_2^{(r)} = & 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left( n + 1 + \frac{m}{2} \right) \sin^2 \theta \cos^{2m-1} \theta \\
 & [P_n^{(1,m)}(\cos(2\theta))]^2 [a_{nm}^3]^2 - [b_{nm}^3]^2
 \end{aligned} \tag{4.99}$$



deoarece

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) \tilde{R}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t))^{(r)} &= (\tilde{R}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) \tilde{L}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t))^{(r)} \equiv 0 \\ (\tilde{L}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) \tilde{L}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t))^{(r)} &= -2\delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1' m_2'} |a_{n_1 m_1'}^3|^2 \\ (\tilde{R}_{n_1}^{m_1'}(\alpha, t) \tilde{R}_{n_2}^{m_2'}(\alpha, t))^{(r)} &= -2\delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1' m_2'} |b_{n_1 m_1'}^3|^2 \end{aligned} \quad (4.100)$$

Aplicând exact aceeași procedură, obținem expresia completă pentru partea radiativă componentei  $S_3$  și anume

$$\begin{aligned} S_3^{(r)} &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left( n + 1 + \frac{m}{2} \right) \cos^2 \theta \sin^{2m-1} \theta \\ &\quad \left[ P_n^{(m,1)}(\cos(2\theta)) \right]^2 \left[ |a_{nm}^2|^2 - |b_{nm}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.101)$$

În final, ca o aplicație imediată a ceea ce am prezentat până acum, să analizăm modurile complementare, rotațional simetrice,  $(n = 0; m = 1)$ ,  $(n = 0; m' = 1)$ , corespunzătoare câmpului electromagnetic efectiv, cu gauge transversal bidimensional, în spațiu - timp  $S^3 \times R$ , static. Deoarece

$$P_0^{(1,1)}(\cos(2\theta)) \equiv 1, \quad (4.102)$$

rezultă din (4.73,79,80)

$$\begin{aligned} A_2(\theta, \beta, t) &= \sin \theta \left\{ \left[ a_{01}^2 e^{i(\beta - \frac{3}{2}t)} + \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta - \frac{3}{2}t)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta + \frac{3}{2}t)} + b_{01}^2 e^{i(\beta + \frac{3}{2}t)} \right] + \right. \\ A_3(\theta, \alpha, t) &= \cos \theta \left\{ \left[ a_{01}^3 e^{i(\alpha - \frac{3}{2}t)} + \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha - \frac{3}{2}t)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha + \frac{3}{2}t)} + b_{01}^3 e^{i(\alpha + \frac{3}{2}t)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Cu  $n = 0$  și  $m = m' = 1$ , funcțiile (4.82.a,b) devin

$$\begin{aligned} X_{01}(\theta) &= \frac{1 - 3 \cos(2\theta)}{2 \cos \theta} \\ W_{01}(\theta) &= \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.104)$$



și conduc la următoarele expresii ale componentelor esențiale (în raport cu baza canonică) ale tensorului electromagnetic

$$F^{12} = -\frac{1-3\cos(2\theta)}{2a^2\cos\theta} \left\{ \left[ a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} + \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} + b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)} \right] \right\}$$

$$F^{13} = \frac{1+3\cos(2\theta)}{2a^2\sin\theta} \left\{ \left[ a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} + \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} + b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)} \right] \right\}$$

$$F^{23} = \frac{i}{a^2\cos\theta} \left\{ \left[ a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)} \right] - \right. \\ \left. - \left[ \bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)} \right] \right\} -$$

$$- \frac{i}{a^2\sin\theta} \left\{ \left[ a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)} \right] - \right. \\ \left. - \left[ \bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)} \right] \right\} -$$

$$F^{24} = -\frac{3i}{a}\sin\theta \left\{ \left[ a_{01}^2 e^{i(\beta-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^2 e^{-i(\beta-\frac{3}{a}t)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \bar{b}_{01}^2 e^{-i(\beta+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^2 e^{i(\beta+\frac{3}{a}t)} \right] \right\}$$

$$F^{34} = -\frac{3i}{a}\cos\theta \left\{ \left[ a_{01}^3 e^{i(\alpha-\frac{3}{a}t)} - \bar{a}_{01}^3 e^{-i(\alpha-\frac{3}{a}t)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \bar{b}_{01}^3 e^{-i(\alpha+\frac{3}{a}t)} - b_{01}^3 e^{i(\alpha+\frac{3}{a}t)} \right] \right\} \quad (4.105)$$



Introducând (4.105) în (4.86), rezultă

$$\begin{aligned}
 E_2 &= i\frac{3}{2}\sin(2\theta)\left\{\left[a_{01}^2e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)}-\bar{a}_{01}^2e^{-i(\beta-\frac{3}{2}t)}\right]+ \right. \\
 &\quad \left. +\left[\bar{b}_{01}^2e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)}-b_{01}^2e^{i(\beta+\frac{3}{2}t)}\right]\right\} \\
 E_3 &= i\frac{3}{2}\sin(2\theta)\left\{\left[a_{01}^3e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)}-\bar{a}_{01}^3e^{-i(\alpha-\frac{3}{2}t)}\right]+ \right. \\
 &\quad \left. +\left[\bar{b}_{01}^3e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)}-b_{01}^3e^{i(\alpha+\frac{3}{2}t)}\right]\right\} \\
 B_1 &= i\sin(\theta)\left\{\left[a_{01}^3e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)}-\bar{a}_{01}^3e^{-i(\alpha-\frac{3}{2}t)}\right]- \right. \\
 &\quad \left. -\left[\bar{b}_{01}^3e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)}-b_{01}^3e^{i(\alpha+\frac{3}{2}t)}\right]\right\}- \\
 &\quad -i\cos(\theta)\left\{\left[a_{01}^2e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)}-\bar{a}_{01}^2e^{-i(\beta-\frac{3}{2}t)}\right]- \right. \\
 &\quad \left. -\left[\bar{b}_{01}^2e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)}-b_{01}^2e^{i(\beta+\frac{3}{2}t)}\right]\right\} \\
 B_2 &= -\frac{1}{2}(1+3\cos(2\theta))\left\{\left[a_{01}^3e^{i(\alpha-\frac{3}{2}t)}+\bar{a}_{01}^3e^{-i(\alpha-\frac{3}{2}t)}\right]+ \right. \\
 &\quad \left. +\left[\bar{b}_{01}^3e^{-i(\alpha+\frac{3}{2}t)}+b_{01}^3e^{i(\alpha+\frac{3}{2}t)}\right]\right\} \\
 B_3 &= -\frac{1}{2}(1-3\cos(2\theta))\left\{\left[a_{01}^2e^{i(\beta-\frac{3}{2}t)}+\bar{a}_{01}^2e^{-i(\beta-\frac{3}{2}t)}\right]+ \right. \\
 &\quad \left. +\left[\bar{b}_{01}^2e^{-i(\beta+\frac{3}{2}t)}+b_{01}^2e^{i(\beta+\frac{3}{2}t)}\right]\right\} \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

obținem din (4.99) și (4.101), componentele esențiale ale vectorului Umov - Poynting implicat în radiația efectivă a modurilor ( $n=0$ ,  $m=m'=1$ )  $\alpha$  - și  $\beta$  - polarizate

$$\begin{aligned}
 S_2^{(r)} &= 6\sin^2\theta\cos\theta\left[|a_{01}^3|^2-|b_{01}^3|^2\right] \\
 S_3^{(r)} &= 6\sin\theta\cos^2\theta\left[|a_{01}^2|^2-|b_{01}^2|^2\right] \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

Utilizând (4.107), este foarte simplu să calculăm impulsul efectiv

$$P_\mu = \int_{(S^3)} S_\mu^{(r)} \sqrt{-g} d^3x \tag{4.108}$$

corespunzător câmpului electromagnetic, cu gauge transversal bidimensional, ( $n=0$ ,  $m=m'=1$ ,  $\alpha$  și  $\beta$ ) pe background  $S^3 \times R$  static. Acesta



este

$$\begin{aligned} P_2 &= 24\pi^2 a^3 \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta \right] \left[ |a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2 \right] \\ P_3 &= 24\pi^2 a^3 \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta \right] \left[ |a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

adică

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[ |a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2 \right] \\ P_3 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[ |a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

unde, desigur, componentele  $P_2, P_3$  ale impulsului efectiv  $\vec{P}$  sunt considerate în raport cu baza pseudo - ortonormală (4.25).

În sfârșit, putem calcula valoarea medie în timp, notată prin  $H^{(r)}$ , a energiei totale

$$H = \int_{(S^3)} w \sqrt{-g} d^3x \quad (4.111)$$

a modurilor complementare, cu simetrie rotațională, (4.102). În acord cu metoda aplicată la studiul radiației efective, vom obține, din (4.106),

$$\begin{aligned} [(E_2)^2]^{(r)} &= \frac{9}{2} \sin^2(2\theta) \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] \\ [(E_3)^2]^{(r)} &= \frac{9}{2} \sin^2(2\theta) \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_1)^2]^{(r)} &= 2 \cos^2(\theta) \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] + 2 \sin^2(\theta) \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_2)^2]^{(r)} &= \frac{[1 + 3 \cos(2\theta)]^2}{2} \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_3)^2]^{(r)} &= \frac{[1 - 3 \cos(2\theta)]^2}{2} \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.112)$$



este

$$\begin{aligned} P_2 &= 24\pi^2 a^3 \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta \right] \left[ |a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2 \right] \\ P_3 &= 24\pi^2 a^3 \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta \right] \left[ |a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

adică

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[ |a_{01}^3|^2 - |b_{01}^3|^2 \right] \\ P_3 &= \frac{48\pi^2}{15} a^3 \left[ |a_{01}^2|^2 - |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

unde, desigur, componentele  $P_2, P_3$  ale impulsului efectiv  $\vec{P}$  sunt considerate în raport cu baza pseudo - ortonormală (4.25).

În sfârșit, putem calcula valoarea medie în timp, notată prin  $H^{(r)}$ , a energiei totale

$$H = \int_{(S^3)} w \sqrt{-g} d^3x \quad (4.111)$$

a modurilor complementare, cu simetrie rotațională, (4.102). În acord cu metoda aplicată la studiul radiației efective, vom obține, din (4.106),

$$\begin{aligned} [(E_2)^2]^{(r)} &= \frac{9}{2} \sin^2(2\theta) \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] \\ [(E_3)^2]^{(r)} &= \frac{9}{2} \sin^2(2\theta) \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_1)^2]^{(r)} &= 2 \cos^2(\theta) \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] + 2 \sin^2(\theta) \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_2)^2]^{(r)} &= \frac{[1 + 3 \cos(2\theta)]^2}{2} \left[ |a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2 \right] \\ [(B_3)^2]^{(r)} &= \frac{[1 - 3 \cos(2\theta)]^2}{2} \left[ |a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.112)$$



Densitatea efectivă de energie, (4.87.b), capătă forma concretă

$$w^{(r)} = [3 - \cos(2\theta)] [|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2] + [3 + \cos(2\theta)] [|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2] \quad (4.113)$$

iar din definiția

$$H^{(r)} = \pi^2 a^3 \int_{-1}^1 w^{(r)}(x) dx; \quad (\text{cu } x = \cos(2\theta)) \quad (4.114)$$

obținem expresia completă a valorii medii în timp, a energiei câmpului electromagnetic, cu modurile ( $n = 0, m = m = 1, \alpha$  și  $\beta$ ) - polarizate, în Universul Einstein

$$H^{(r)} = 6\pi^2 a^3 \left\{ [|a_{01}^2|^2 + |b_{01}^2|^2] + [|a_{01}^3|^2 + |b_{01}^3|^2] \right\}. \quad (4.115)$$

### 4.3 Ecuațiile câmpului electromagnetic pe $S^3 \times R$ în formulare canonică

În încheierea acestui capitolul, dedicat studiului câmpului electromagnetic, în Universul Einstein, să scriem ecuațiile electrodinamicii într-un fibrat principal, cu varietatea de bază  $\mathcal{M} = S^3 \times R$  și grupul structural abelian  $U(1)$  [8]. Rezultatele obținute vor fi generalizate în capitolul următor, constituit ca o tentativă de geometrizare a principalelor surse materiale și a interacțiunilor dintre acestea, în cadrul unei teorii gauge  $SU(2) \times U(1)$ , pe  $S^3 \times R$ .

Vom păstra aceeași parametrizare, (1.177), pentru sfera  $S^3$ , de rază unitate. Lucrând în baza rigidă (1.186), componentele 1-formei de



conexiune sunt (1.93) care, înlocuite în expresia generală a derivatei covariante a unui vector

$$\nabla_i V_j = c_i V_j - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (4.116)$$

ne conduc la

$$\nabla_i V_j = c_i V_j + \varepsilon_{4jik} V^k \quad (4.117)$$

Tinând cont de expresiile (1.187), ale constantelor de structură  $C_{ij}^k$ , tensorul de curbură (Riemann), (1.63), devine

$$\begin{aligned} R_{jik}^m &= c_i \Gamma_{jk}^m - c_k \Gamma_{ji}^m + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ri}^m - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{rk}^m - \Gamma_{jr}^m C_{ik}^r = \\ &= \delta_{m4} \delta_{ji} \delta_{4k} + \delta_{mk} \delta_{j4} \delta_{4i} - \delta_{mi} \delta_{4k} \delta_{j4} - \delta_{m4} \delta_{4i} \delta_{jk} + \delta_{mi} \delta_{jk} - \delta_{mk} \delta_{ji} \end{aligned} \quad (4.118)$$

iar tensorul Ricci este

$$R_{ij} = 2(\delta_{ij} - \delta_{i4} \delta_{4j}) \quad (4.119)$$

Ca și în cazul câmpurilor Yang - Mills, studiate în paragraful (3.4) dedicat formulării unei teorii gauge  $SO(3,1) \times SU(N)$  a câmpului Rarita - Schwinger, vor apare termeni suplimentari (față de expresiile de tip minkowskian), atât în tensorul câmpului electromagnetic

$$\begin{aligned} F_{ij} &= c_i A_j - c_j A_i - 2\varepsilon_{4ijk} A^k = \\ &= \tilde{F}_{ij} - 2\varepsilon_{4ijk} A^k \end{aligned} \quad (4.120)$$



cât și în expresia densității de lagrangeian [5]

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (e_i A_j - e_j A_i) (e^i A^j - e^j A^i) - \\ &\quad - \varepsilon_{4ijk} A^k (e^i A^j - e^j A^i) + 2(A_k A^k - A_4 A^4) = \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_{em} - \varepsilon_{4ijk} A^k (e^i A^j - e^j A^i) + 2(A_k A^k - A_4 A^4) \end{aligned} \quad (4.122)$$

Utilizând pentru densitatea de lagrangeian expresia covariantă

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{4} (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) (\nabla^i A^j - \nabla^j A^i) \quad (4.123)$$

vom obține, din ecuațiile Euler - Lagrange

$$\nabla_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_j A_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i}, \quad (4.124)$$

ecuațiile Maxwell, fără surse, pe spațiu - timpul  $S^3 \times R$

$$\nabla_i F^{ij} = 0 \quad (4.125)$$

sau

$$e_j F^{ij} = \varepsilon_4{}^i{}_{jk} F^{jk} \quad (4.126)$$

Pentru a face o comparație între (4.125) și ecuațiile Maxwell pe spațiul Minkowski, să introducem câmpul electric și câmpul magnetic, prin relațiile uzuale

$$F^{\mu 4} = -F_{\mu 4} = -E_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (4.127)$$

și

$$F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\eta} B^\eta \quad (4.128)$$



care, ținând cont de (4.120), devin

$$E_\mu = c_\mu \Lambda_4 - c_4 \Lambda_\mu \quad (4.129)$$

și respectiv

$$B^\nu = \varepsilon^{\nu\alpha\beta} c_\alpha \Lambda_\beta - 2A^\nu \quad (4.130)$$

membrul drept al expresiei (4.129) definind rotorul câmpului vectorial  $\vec{A}$ , pe background  $S^3 \times R$ .

Revenind la ecuațiile de câmp (4.125), să considerăm  $\underline{i} = \alpha$  și avem

$$e_\beta F^{\alpha\beta} + c_4 F^{\alpha 4} = 2B^\alpha \quad (4.131)$$

de unde, utilizând (4.126,127) și expresia rotorului (4.129), obținem forma obișnuită, de tip minkowskian,

$$\varepsilon^{\alpha\beta\eta} e_\beta B_\eta - 2B^\alpha = \partial_4 E^\alpha \quad (4.132)$$

sau

$$(\nabla \times \vec{B})^\alpha = \partial_t E^\alpha \quad (4.133)$$

De asemenea, pentru  $\underline{i} = 4$ , rezultă

$$e_\alpha F^{4\alpha} = 0 \quad (4.134)$$

adică

$$e_\alpha E^\alpha = 0 \quad (4.135)$$

În sfârșit, să facem următoarea observație. Rezultatele (4.125), (4.132) și (4.134) sunt un caz particular al relațiilor generale

$$\begin{aligned} e_j F^{ij} &= \frac{1}{2} g^{jk} (e_l g_{jk} + e_j g_{kl} - e_k g_{jl}) F^{li} + \varepsilon_4^i{}_{jk} F^{jk} = \\ &= \tilde{\Gamma}_{jk}^j F^{ki} + \varepsilon_4^i{}_{jk} F^{jk} \end{aligned} \quad (4.136)$$



$$(\nabla \times \vec{B})^\alpha = \partial_t E^\alpha + \tilde{\Gamma}_{jk}^j F^{k\alpha} \quad (4.137)$$

și respectiv

$$e_\alpha E^\alpha = -\tilde{\Gamma}_{j\alpha}^j E^\alpha \quad (4.138)$$

unde  $g_{ij}$  și  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  sunt, respectiv, tensorul metric fundamental și simbolurile Christoffel de conexiune, definite în raport cu o bază canonică (de coordonate).



# Bibliografie

- [1] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. J. Phys.* **42**, (*sub tipar*).
- [2] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.99**, Florence.
- [3] Dariescu, C., Dariescu, M.A., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.100**, Florence.
- [4] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.
- [5] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1995, *Astron. Phys. J.* **5**, 61.
- [6] Rîjic, I.M., and Gradstein, I.S., 1955, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*, București: Ed. Tehnică.
- [7] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.
- [8] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.



# Cuprins

5	EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A MODELULUI WEINBERG - SALAM	161
5.1	Introducere . . . . .	161
5.2	Modelul Weinberg - Salam în spațiu - timpul Minkowski	170
5.2.1	Lagrangeianul teoriei . . . . .	171
5.2.2	Mecanismul Higgs . . . . .	176
5.2.3	Fermionii în modelul Weinberg - Salam . . . . .	185
5.3	Interacțiuni electrolabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă . . . . .	187
5.4	Teorii gauge $SU(2) \times U(1)$ în Universul Einstein . . . . .	190



## Capitolul 5

# EXTENSIUNEA GEOMETRODINAMICA $S^3 \times R$ A MODELULUI WEINBERG - SALAM

### 5.1 Introducere

Din timpuri imemoriabile, omul a dorit să înțeleagă forțele fundamentale din natură. De asemenea, el a încercat să explice complexitatea naturii cu ajutorul a cât mai puține concepte elementare posibile. Teoriile gauge tratează aceste două probleme în mod unitar: particulele elementare (descrise prin câmpuri cuantice relativiste) sunt reprezentările unor operatori, corespunzând masei gravitaționale, spinului, culorii, aromei, sarcinii electrice etc., iar forțele exprimă interacțiunile dintre aceste *sarcini*. Obiectivul principal este acela de a unifica aceste sarcini (și deci forțe) într-o singură entitate, ale cărei diferite componente să



se poate transforma din una în alta.

Decernarea premiului Nobel pentru fizică, în 1979, pentru elaborarea unei teorii gauge de unificare a interacțiunilor slabe cu cele electromagnetice, a coincis cu împlinirea a aproape 100 de ani de la moartea lui J.C. Maxwell, cel care a realizat prima teorie de unificare a forțelor (electrice și magnetice) și căruia, prin completarea adusă de H. Weyl în cadrul primei teorii de geometrizare a câmpului electromagnetic [1], i se atribuie originea teoriilor gauge. Tot în 1979, s-au aniversat 100 de ani de la nașterea lui A. Einstein, cel care a gândit, într-o viziune nouă, ideea unificării tuturor forțelor din natură. Cu acest prilej, A. Salam face un scurt istoric al dezvoltării teoriilor gauge (minkowskiene), menționând confirmarea experimentală a acestora, prin descoperirea, la CERN, în 1973, a curenților neutri.

Interesul pentru teoriile gauge, ca principal candidat pentru o teorie de unificare a tuturor interacțiunilor, *A Theory of Everything*, s-a manifestat după publicarea, în 1954, a lucrării lui Yang și Mills, [2], care leagă ideea lui Maxwell de simetria internă  $SU(2)$ .

În 1956, T.D. Lee și C.N. Yang, [3], au semnalat violarea parității în interacțiunile nucleare slabe. Încercarea de explicare a acestei violări, în procese în care intervine particula neutrino, a condus la ideea simetriilor chirale și la stabilirea unei legături cu masa nulă a particulei neutrino [4].

Astfel la sfârșitul deceniului șase, erau conturate următoarele idei:

1. simetria chirală conduce la o teorie în care curențul este  $J = V - A$  (unde  $V$  este partea vectorială, iar  $A$  este cea axială) ,
2. interacțiunile slabe sunt mediate de particule intermediare grele,



de spin unu, descrise de teorii gauge neabeliene ,

3. generarea maselor pentru aceste particule, precum și pentru electroni și particula  $\mu$ , se face prin mecanismul ruperii spontate a simetriei locale. care, așa cum va demonstra 't Hooft, mai târziu (1971), nu strică renormabilitatea acestor teorii [5].

Perioada 1961 - 1967 a fost decisivă pentru elaborarea unui model de unificare a interacțiunilor slabe cu cele electromagnetice. Erau deci necesare două tipuri de curenți, care să se cupleze la câmpurile gauge corespunzătoare ( $W^\pm, Z^0, \gamma$ ). În 1967 (S. Weinberg [6]) și 1968 (A. Salam [7]) este publicată teoria interacțiunilor electrolabe, având ca grup intern pe  $SU(2) \times U(1)$ , cu generarea maselor pentru electroni și bozoni vectoriali intermediari prin mecanism Higgs. Se realizase astfel, o teorie gauge de unificare a interacțiunilor slabe cu cele electromagnetice, renormabilă și a cărei confirmare experimentală ulterioară, o va situa printre marile teorii ale secolului nostru.

În paralel cu aceasta, s-a dezvoltat o teorie gauge  $SU(3)_c$  a interacțiunilor tari (cromodinamica cuantică), cu descoperirea indirectă a celor opt bozoni gauge asociați, gluonii [8]. În 1970, introducerea celui de al patrulea cuarc, denumit *charm*, soluționează dilema absenței curenților ce violează stranietatea iar, începând din 1977, (descoperirea rezonanței upsilon) fizica celui de al cincilea cuarc, *bottom*, a jucat un rol important în înțelegerea Modelului Standard, cu trei generații de leptoni și cuarci, bazat pe grupul de etalonare  $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$ .

Dar, una dintre cele mai importante consecințe ale fizicii mezonilor  $B$ , conținând cuarcul *bottom*, o constituie dezlegarea misterului violării parității combinate  $CP$ , observat, nu numai în dezintegrările mezonilor



$K$  neutri [9], ci și la mezonii  $B$  [10,11]. O înțelegere a acestei violări ar explica evoluția Universului, după Big Bang, într-o lume dominată de materie și nu într-una în care materia și antimateria ar fi prezente în mod egal. Toate aceste rezultate, inclusiv cele legate de fizica cuarcului  $top$ , coroborează într-o veritabilă forță motrice a Modelului Standard, permițându-i să reziste testelor experimentale din ultima decadă.

Deoarece atât modelul Weinberg - Salam, cât și Modelul Standard, au la bază o unificare *trivială*, fundamentată pe produsul direct al grupurilor de etalonare  $SU(2) \times U(1)$  și respectiv  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , următorul pas a fost construirea unei teorii gauge cu un grup de etalonare unic, cu o singură constantă de cuplaj, masele particulelor fiind generate printr-un mecanism adecvat de rupere spontană de simetrie [12,13,14].

După această succintă prezentare a unui model de unificare a trei tipuri de interacțiuni fundamentale din natură, să ne oprim asupra posibilității includerii gravitației în cadrul acestor teorii, ca un omagiu adus marelui A. Einstein ai cărui ultimii 35 de ani din viață au fost dedicați rezolvării următoarelor două probleme:

1. unificarea gravitației cu materia ,
2. explicarea naturii sarcinii electrice în termeni de geometrie a spațiu - timpului, în același mod în care reușise să explice natura sarcinii gravitaționale, în termeni de curbura spațio - temporală.

Se naște întrebarea : *pot fi extinse teoriile gauge de unificare a interacțiunilor tari și electrolabe astfel încât să fie inclusă și gravitația?*

O încercare în acest sens o constituie reactualizarea teoriilor de câmp Kaluza - Klein (1920) de unificare a electromagnetismului cu



gravitația în cinci dimensiuni spațio - temporale. Câmpul Maxwell este asociat componentelor suplimentare ale curburii, introduse de a cincea dimensiune. Generalizarea acestor teorii se face prin considerarea simetriilor interne ca simetrii spațio-temporale ale dimensiunilor neobservabile. Introducerea dimensiunilor suplimentare necesită o compactificare spontană a lor, pentru a se obține spectrul particulelor din teoriile Kaluza - Klein.

Evident, în spiritul celor prezentate mai sus, prima tentativă de unificare a celor patru interacțiuni fundamentale ar fi cu ajutorul unui grup gauge unic. Din păcate, teorema Coleman - Mandula interzice amestecul simetriilor interne cu cele spațio - temporale [15]. Această teoremă a putut fi ocolită prin elaborarea supersimetriei, care grupează, în cadrul aceluiasi multiplu, atât bozoni cât și fermioni și oferă răspuns la așa numita *problemă ierarhică* din cadrul teoriilor GUT (*Grand Unified Theories*). Astfel, problema diagramelor cu o buclă închisă, care introduc divergențe în teorie, se rezolvă prin anihilarea între diagramele fermionice (cu semnul minus) și cele bozonice (cu semnul plus). Supersimetria este privită acum ca o posibilă simetrie fundamentală, nouă, a naturii [16,17].

Mai departe, supergravitația unifică câmpurile spinoriale cu gravitația și cu alte câmpuri gauge, pe un superspațiu conținând dimensiuni fermionice suplimentare. Astfel, supergravitația simplă este teoria gauge a supersimetriei, particulele gauge fiind gravitonul și partenerul său supersimetric, gravitino. Supergravitațiile extinse (cu simetrie  $SO(8)$ ) au același lagrangeian, în patru dimensiuni spațio - temporale, ca și supergravitația simplă în 11 dimensiuni, dintre care 7 compactificate [18,19].



Teoria cuantică a stringurilor [20] constituie, astăzi, principalul candidat pentru realizarea unei teorii de unificare a tuturor interacțiunilor, deoarece permite existența stărilor de spin unu și 2, corespunzătoare mezonilor vectoriali și respectiv gravitonilor și soluționează o serie de probleme, cum ar fi cea a numărului mare de parametri (aproximativ 19) introduși, în mod arbitrar, în Modelul Standard.

În ultimii ani, dezvoltarea spectaculoasă a teoriilor gauge prin lărgirea grupului de simetrie internă, extinderea algebrelor Lie la algebre Lie graduate, includerea gravitației, creșterea numărului de dimensiuni etc., a condus la elaborarea unor teorii elegante care să unifice cele patru interacțiuni fundamentale. Deși există convingerea că natura detestă simetriile globale, supunându-se *principiului gauge*, totuși nici una dintre teoriile menționate mai sus nu poate oferi o descriere perfectă a sa, direcțiile prezentate rămânând deschise cercetărilor viitoare.

Iată câteva dintre aceste deficiențe, a căror soluționare a condus la perfecționarea continuă a teoriilor existente și la necesitatea elaborării altora, noi, în efortul continuu de înțelegere și modelare a naturii, în toată diversitatea ei.

Deși Modelul Standard este capabil să descrie cu succes un volum enorm de date experimentale, înscriindu-se alături de electrodinamica cuantică, drept una dintre teoriile fundamentale ale acesui sfârșit de secol, totuși el este departe de a fi perfect, lăsând neelucitate un număr mare de probleme, printre care amintim: natura sarcinii electrice și sarcinile fracționare ale cuarcilor, ierarhizarea după mase a celor trei generații de cuarci și leptoni, elementele matricii de amestec a cuarcilor, numărul mare de constante introduse *by hand*, unele dintre acestea fiind legate de sectorul Higgs și de mecanismul ruperii spontane de simetrie.



Teoriile *GUT*, cu o singură constantă de cuplaj și un singur grup  $G$  ce include pe  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  și  $U(1)$ , oferă răspunsuri la problemele referitoare la cuantificarea sarcinii electrice, unghiul Weinberg, relația dintre masele cuarcilor și leptonilor, mase diferite pentru neutrini, violarea numărului barionic. Din păcate, ele includ un număr prea mare de bozoni gauge suplimentari și ignoră complet gravitația. Ideea considerării supersimetriei ca o nouă simetrie a naturii, cu versiunea supersimetrică a gravitației, supergravitația, oferă marea posibilitatea de unificare a celor patru interacțiuni. Credibilitatea acestor teorii depinde, însă, în mod crucial, de descoperirea superpartenerilor, care, din păcate, se lasă așteptată.

Deoarece supergravitația  $N = 1$  ridică multe semne de întrebare legate de imposibilitatea echivalenței locale sau nerezolvarea problemei divergențelor, s-a trecut la supergravitații extinse,  $1 < N \leq 8$ . Cel mai simplu exemplu,  $N = 2$ , unifică teoria lui Maxwell cu gravitația, eliminând divergențele. Pentru supergravitațiile extinse,  $N > 1$ , nu există metode generale de studiu, fiecare variantă prezentând, pe lângă avantaje, propriile deficiențe. De exemplu, pentru  $N = 8$ , simetria  $SU(8)$  cere un număr de 63 de câmpuri gauge. Rămân să fie deci eliminate, cele 35 de câmpuri suplimentare.

Se pare că teoria stringurilor, de la nașterea căreia se vor împlini, în curând, 30 de ani, este cea mai aproape de realizarea unificării celor patru tipuri de interacțiuni fundamentale. Totuși, stringurile bozonice, care oferă posibilitatea unificării gravitației cu teoriile Yang - Mills, au două defecte: nu conțin în spectru fermioni și presupun existența particulelor nefizice, tachionii. O teorie consistentă, fără tachioni, se poate construi într-un spațiu - timp 26 dimensional.



Includerea supersimetriei a adus două îmbunătățiri majore și anume, înlătură tachionii și coboară numărul de dimensiuni la 10. Teoria superstringurilor pare deci să ofere posibilitatea construirii unei teorii cuantice relativiste de câmp, care să rămână finită și după includerea gravitației, iar numărul mare de dimensiuni nu constituie o problemă atunci când știm să le compactificăm până la 4.

Nu putem afirma însă că există o legătură directă între fenomenologia Modelului Standard și teoria superstringurilor [21], care, de altfel, nu soluționează nici problema găurilor negre și a singularităților inițiale din cosmologie. În plus, teoria stringurilor și superstringurilor ne furnizează informații numai la scala Planck, neputând fi deci verificată experimental decât, eventual, indirect.

Deși în ultimii 20 de ani, fiecare dintre direcțiile abordate în cuprinsul acestei introduceri s-a dezvoltat în mod spectaculos, deficiențele existente și a căror trecere în revistă am făcut-o mai sus, sunt semnale că problema este departe de a-și fi găsit o soluție satisfăcătoare.

Revenind la problema originală a trecerii de la relativitatea specială la cea generală, se pune întrebarea dacă o formă modificată a teoriilor Yang - Mills poate realiza această trecere. Împreună cu un grup Lie compact semisimplu, se folosesc grupuri Lorentz omogene și neomogene, care acționează atât pe spațiu - timp, cât și pe câmpurile dinamice, în scopul construirii unor teorii gauge extinse (față de grupuri interne și externe) pentru gravitație și restul materiei. Printre direcțiile de abordare a acestui subiect, cele mai promițătoare, atât sub aspectul penetrabilității științifice cât și al eleganței și coerenței matematice, sunt cele care au la bază generalizarea noțiunii de varietate diferențiabilă și a câmpurilor și obiectelor geometrice fundamentale, definite pe aceasta,



prin introducerea noțiunii de fibrat principal și fibrat vectorial.

Prin utilizarea tehnicilor uzuale de lucru cu acestea, rolul dominant fiind deținut de legile de derivare și de câmpurile geometrice esențiale (metric fundamental, de curbura), s-a reușit elaborarea unor modele unitare de geometrizare a câmpurilor gauge neabeliene, în prezența gravitației [22,23]. Cercetările contemporane, în această direcție, caută să-i desăvârșească completitudinea științifică prin includerea, în cadrul acestei tentative de geometrizare, a câmpurilor principalelor surse materiale, elaborându-se modele care, în limita energiilor joase, respectă principiul euristic [24,25].

După cum am văzut pe parcursul celor patru capitole ale prezentei lucrări, alegerea variației spațio-temporale  $S^3 \times R$ , pentru generalizarea teoriilor de pe spațiul Minkowski, pe lângă motivația istorică de a fi primul model de Univers, este deosebit de atractivă din punctul de vedere al simetriei sale ridicate. Aceasta permite utilizarea tehnicilor din teoria grupurilor în vederea studiului câmpurilor bozonice și fermionice pe această varietate. Separarea dimensiunii temporale și compactificarea spațiului tridimensional, permit aplicarea formalismului hamiltonian pentru dezvoltarea teoriilor cuantice, prin utilizarea variabilelor Ashtekar [26,27].

În plus, D. Sen a arătat [28] că o parte din rezultatele ce nu pot fi obținute direct în spațiul minkowskian, se obțin prin trecerea la limită a celor de pe  $S^3 \times R$ . De exemplu, într-o teorie cu supersimetrie globală, se definește indicele Witten ca fiind egal cu diferența dintre numărul stărilor bozonice și fermionice. Pentru a evalua numărul de stări, teoria se formulează într-un volum finit astfel încât spectrul energetic să fie discret. Prin utilizarea variației  $S^3 \times R$ , se extinde clasa teoriilor în



care acest indice poate fi calculat. În cazul unui rezultat nenul, pentru orice valoare a razei lui  $S^3$ , teoria nu rupe supersimetria în spațiul Minkowski.

În continuare, după o trecere în revistă a principalelor caracteristici ale modelului interacțiunilor electrolabe, elaborat de Weinberg și Salam, în spațiu - timp plat, vom trece la formularea tetrică Lorentz - gauge invariantă a acestuia, în Universul Einstein.

## 5.2 Modelul Weinberg - Salam în spațiu - timpul Minkowski

Teoria electrolabă unifică electrodinamica cuantică cu teoria interacțiunilor slabe, la energii joase. Prezicerea curenților neutri, alături de alte verificări experimentale, au sporit, de-a lungul anilor, încrederea cercetătorilor în largă aplicabilitate a acestei teorii, deja considerată clasică și dezvoltată în orice curs dedicat particulelor elementare și interacțiunilor dintre acestea [29-36].

Menționăm că în cadrul prezentului paragraf, metrica varietății minkowskiene va fi cea întâlnită în literatura de specialitate, adică

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$



### 5.2.1 Lagrangeianul teoriei

Interacțiunile electrolabe își datorează numele intensității lor.

La energii joase, conform teoriei interacțiunilor celor patru fermioni (Fermi, 1934), tăria interacțiunii este determinată de constanta Fermi de cuplaj

$$G_F = 1,16637(2) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (5.1)$$

lagrangeianul efectiv al teoriei fiind [36]

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\alpha^\dagger J^\alpha + h.c. \quad (5.2)$$

curenții fermionici încărcăți, conținând o parte leptonică și una hadronică

$$J_\alpha = J_{\alpha l} + J_{\alpha h} \quad (5.3)$$

cu

$$\begin{aligned} J_{\alpha l} &= \bar{\nu}_l \gamma_\alpha e + \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha \mu \\ J_{\alpha h} &= \bar{p} \gamma_\alpha n \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dar, o astfel de teorie, având indicele de divergență 2, nu este renormabilă, divergențele neputând fi absorbite prin redefinirea constantelor de cuplaj [30].

Pe de altă parte, la energii înalte, contribuția propagatorului bozonului vectorial cu masă nu mai poate fi neglijată. Deoarece raza de acțiune a interacțiunilor slabe este foarte mică,

$$r_W \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ cm}$$

rezultă următoarea valoare aproximativă a masei bozonului intermediar

$$m_W = \frac{h}{2\pi r_W c} \approx 81 \text{ GeV}$$



ceea ce ar conduce la un lagrangeian de tipul

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger)(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad (5.5)$$

care, de asemenea, nu este renormabil. Dar, după cum se poate demonstra, ruperea spontană de simetrie și mecanismul Higgs mustră renormabilitatea teoriei [32]. Ideea este deci, de a se porni cu o teorie gauge, cu câmpuri vectoriale nemasive, deci renormabilă, în care masele bozonilor intermediari să fie generate prin mecanism Higgs.

Cum atât teoria interacțiunilor electromagnetice, cât și cea a interacțiunilor slabe pot fi dezvoltate similar, ca teorii gauge față de diferite grupuri interne, apare deci posibilitatea unificării lor în cadrul unei teorii unice. După ce Schwinger, în 1957, a avansat pentru prima oară ideea acestei unificări, S.L. Glashow (1961), S. Weinberg (1967) și A. Salam (1968) construiesc modelul ce le poartă numele, având la bază grupul de etalonare  $SU(2) \times U(1)$ , și căruia ulterior i se va demonstra renormabilitatea (Hooft, 1971 [5]).

Desigur, o teorie care să unifice cele două interacțiuni trebuie să țină cont de diferența enormă dintre masele particulelor vectoriale ce le mediază.

Referitor la alegerea grupului de simetrie, ea se justifică astfel. Sarcinile asociate celor trei curenți, care se cuplează la câmpul electromagnetic,  $A_\mu$ , și la bozonii masivi încărcăți  $W_\mu^\pm$  nu formează o algebra Lie tridimensională închisă. În concluzie, grupul de simetrie internă cu trei generatori,  $SU(2)$ , trebuie extins, cea mai simplă combinație fiind produsul direct  $SU(2) \times U(1)$ . Asupra celor patru generatori, cei ai grupului  $SU(2)$  și sarcina electrică  $Q$ , corespunzătoare lui  $U(1)$  și a curenților la care aceștia se cuplează, vom reveni în paragrafele următoare.



Odată stabilit grupul intern, densitatea de lagrangeian invariantă față de acesta va fi

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \quad (5.6)$$

unde

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \quad (5.7)$$

cu

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon^{ijk}A_{\mu j}A_{\nu k} \quad (5.8)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (5.9)$$

este lagrangeianul câmpurilor de etalonare,

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \quad (5.10)$$

este lagrangeianul local invariant al câmpurilor fermionice nemasive,  $\mathcal{L}_3$  este lagrangeianul câmpului scalar complex, cu simetrie ruptă spontan, care va juca rolul esențial în mecanismul Higgs, iar  $\mathcal{L}_4$  exprimă un cuplaj, de tip Yukawa, între scalari și fermioni.

Cum asupra termenilor  $\mathcal{L}_2$  și  $\mathcal{L}_3$ , vom reveni în secțiunile următoare ale acestui paragraf, să ne ocupăm acum de noțiunea de invarianță locală și de câmpurile gauge ale teoriei. După cum se cunoaște, pentru ca lagrangeianul Dirac uzual

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (5.11)$$

să fie invariant față de grupul  $U(1)$  al transformărilor locale

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha(x)} \quad (5.12)$$



trebuie ca nu numai câmpurile să se transforme după legea

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}\end{aligned}\quad (5.13)$$

dar și derivatelor lor, adică

$$\begin{aligned}D_\mu\psi &\rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi \\ D_\mu\bar{\psi} &\rightarrow (D_\mu\bar{\psi})' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\bar{\psi}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Considerând, în (5.14), derivata gauge  $U(1)$  de forma uzuală

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (5.15)$$

unde constanta de cuplaj,  $e$ , este chiar sarcina electronului, rezultă următoarea lege de transformare a câmpului gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (5.16)$$

pentru care tensorul câmpului electromagnetic (5.9) rămâne invariant, adică

$$F_{\mu\nu}' = F_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

având lagrangeianul corespunzător  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

În concluzie, lagrangeianul Dirac (5.11) va fi înlocuit cu forma  $U(1)$  - gauge covariantă:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

În mod analog, putem considera al alt grup intern, de această dată neabelian, de exemplu  $SU(2)$ , cu elementele

$$U(\theta) = \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta}(x)\right] \quad (5.19)$$



trebuie ca nu numai câmpurile să se transforme după legea

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}\end{aligned}\quad (5.13)$$

dar și derivatelor lor, adică

$$\begin{aligned}D_\mu\psi &\rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi \\ D_\mu\bar{\psi} &\rightarrow (D_\mu\bar{\psi})' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\bar{\psi}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Considerând, în (5.14), derivata gauge  $U(1)$  de forma uzuală

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (5.15)$$

unde constanta de cuplaj,  $e$ , este chiar sarcina electronului, rezultă următoarea lege de transformare a câmpului gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu' = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (5.16)$$

pentru care tensorul câmpului electromagnetic (5.9) rămâne invariant, adică

$$F_{\mu\nu}' = F_{\mu\nu} \quad (5.17)$$

având lagrangeianul corespunzător  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

În concluzie, lagrangeianul Dirac (5.11) va fi înlocuit cu forma  $U(1)$  - gauge covariantă

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

În mod analog, putem considera al alt grup intern, de această dată neabelian, de exemplu  $SU(2)$ , cu elementele

$$U(\theta) = \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta}(x)\right] \quad (5.19)$$



și ai cărui generatori satisfac algebra

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (5.20)$$

unde  $\{\sigma_i\}_{i=1,3}$  sunt matricile Pauli.

Relațiile de transformare pentru funcție vor fi

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U(\theta)\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^{-1}(\theta) \end{aligned} \quad (5.21)$$

iar cele pentru derivate

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\theta) D_\mu \psi \\ \overline{D_\mu \psi} &\rightarrow (\overline{D_\mu \psi})' = \overline{D_\mu \psi} U^{-1}(\theta) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Luând derivata  $SU(2)$  - gauge covariantă de forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \quad (5.23)$$

găsim următoarea lege de transformare pentru câmpurile de etalonare

$$\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu' = U \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (5.24)$$

sau, dacă scriem (5.19) în forma sa infinitezimală

$$U(\theta) = 1 - i \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (5.25)$$

legea de transformare (5.24) devine

$$A_\mu^k' = A_\mu^k + \epsilon^{ijk} \theta_j A_{\mu i} - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^k \quad (5.26)$$

În expresiile de mai sus, pentru simplitate, se poate folosi notația

$$A_\mu = \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \quad (5.27)$$



Corespunzător, vom găsi pentru tensorul Yang - Mills

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk} A_{\mu j} A_{\nu k} \quad (5.28)$$

legea de transformare

$$\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}' = U \left( \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} \right) U^{-1} \quad (5.29)$$

sau, infinitezimal

$$F_{\mu\nu}^i' = F_{\mu\nu}^i + \epsilon^{ijk} \theta_j F_{\mu\nu k} \quad (5.30)$$

Lagrangeianul Dirac  $SU(2)$  - gauge invariant are expresia

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i g \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \right) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} \quad (5.31)$$

cu  $F_{\mu\nu}^i$  dat de (5.28).

În cele prezentate mai sus, am considerat două grupuri gauge,  $U(1)$  și  $SU(2)$ , cu constantele de cuplaj  $e$  și respectiv  $g$ . Pentru fiecare grup simplu, cu reprezentare ireductibilă, există o singură constantă de cuplaj. Dacă se consideră un produs direct de grupuri simple, de exemplu  $SU(2) \times U(1)$ , atunci teoria conține ambele constante de cuplaj.

### 5.2.2 Mecanismul Higgs

Pentru început, să definim conceptul de simetrie ruptă spontan.

Spunem că un hamiltonian  $H_0$  are simetria exactă dacă el rămâne invariant la transformarea

$$U H_0 U^\dagger = H_0, \quad U \in SU(N) \quad (5.32)$$



adică  $H_0$  comută cu  $U$

$$UH_0 = H_0U \quad (5.33)$$

Dezvoltându-l în serii pe  $U$  și neglijând puterile superioare ale lui  $\theta$ ,

$$U(\theta) = 1 - i\theta^k T_k + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (5.34)$$

găsim că invarianța lui  $H_0$  se poate exprima prin faptul că acesta comută cu generatorii  $\{T_k\}$  ai grupului  $SU(N)$ .

Dacă hamiltonianul  $H$  rămâne invariant față de transformările grupului  $SU(N)$ , dar starea de vid  $|0\rangle$ , (definită ca stare de energie minimă) nu mai este invariantă, atunci spunem că avem o rupere spontană de simetrie. În acest caz, condiția

$$U|0\rangle \neq |0\rangle \quad (5.35)$$

se scrie ca

$$T_k|0\rangle \neq 0 \quad (5.36)$$

și caracterizează ruperea de simetrie, față de grupul intern  $SU(N)$ .

Putem vorbi despre o rupere spontană a simetriei globale, caz în care, conform teoremei Goldstone, apar o serie de particule, fără masă și fără spin, denumite bozoni Goldstone [29]. În urma ruperii spontane și a simetriei locale, bozonii Goldstone sunt "înghițiți" de către câmpurile gauge, care capătă masă. Fenomenul poartă numele de mecanism Higgs. În situația în care nu se rup toate simetriile locale, rămânând simetrii reziduale, numărul câmpurilor gauge masive va fi egal cu numărul generatorilor simetriei inițiale minus numărul generatorilor simetriei finale.

Acesta este și cazul modelului Weinberg - Salam. După cum vom vedea, din cele patru câmpuri gauge corespunzătoare grupului de eta-



lonare  $SU(2) \times U(1)$ , trei vor căpăta masă, prin mecanism Higgs, iar al patrulea (fotonul), corespunzând unei simetrii reziduale  $U(1)_{em}$ , va rămâne fără masă.

În continuare, să revenim la expresia (5.6), a lagrangeianului ce descrie interacțiunile electrolabe și să ne concentrăm asupra termenului  $\mathcal{L}_3$ . Acesta caracterizează un dublet scalar complex și are forma

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.37)$$

unde derivata  $SU(2) \times U(1)$  gauge - covariantă

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \quad (5.38)$$

conține atât generatorii grupului  $SU(2)$ , corespunzători izospinului, cât și generatorul lui  $U(1)$ , care este în acest caz hipersarcina  $Y$ .

Schimbarea semnului din fața termenului  $m^2 \phi^\dagger \phi$  implică o rupere spontană de simetrie. Într-adevăr, condiția de minim a potențialului

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

pune în evidență o valoare nenulă a stării de vid

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \chi \quad (5.40)$$

unde am introdus notația

$$v^2 = \frac{m^2}{\lambda} \quad (5.41)$$



Se verifică imediat condiția de rupere spontană de simetrie, atât pentru  $SU(2)$  cât și pentru  $U(1)$ , deoarece

$$\begin{aligned}\sigma^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\neq 0 \\ \sigma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\neq 0 \\ \sigma^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\neq 0 \\ Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\neq 0\end{aligned}\quad (5.42)$$

În schimb, combinația

$$Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)$$

corespunzând sarcinii electrice și generând o simetrie  $U(1)_{em}$ , lasă invariantă starea de vid (5.40). Deci, simetria  $SU(2) \times U(1)$  se rupe după schema

$$SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

teoria având o simetrie reziduală, față de grupul  $U(1)_{em}$ . În consecință, din cele patru câmpuri gauge, trei vor căpăta masă, prin mecanism Higgs, iar al patrulea, fotonul, rămâne de masă nulă.

Efectuăm în lagrangeianul (5.37) translația

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_0$$

și obținem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 = & \left[ \left( \partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{B_\mu}{2} \right) (\phi + \phi_0) \right]^\dagger \\ & \left[ \left( \partial^\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}^\mu - ig' \frac{B^\mu}{2} \right) (\phi + \phi_0) \right] \\ & + m^2 (\phi + \phi_0)^\dagger (\phi + \phi_0) - \lambda [(\phi + \phi_0)^\dagger (\phi + \phi_0)]^2\end{aligned}\quad (5.43)$$



și separăm termenul liber  $\mathcal{L}_3^0$  de partea de interacțiune  $\mathcal{L}_3^I$ .

Să ne focalizăm atenția, pentru început asupra părții

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^0 = & \frac{g^2 v^2}{8} (\vec{A}_\mu)^2 + \frac{g'^2 v^2}{8} (B_\mu)^2 + gg' B^\mu A_\mu^i \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 + \\ & + ig A_\mu^i \left( \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 \right) + ig' \frac{B_\mu}{2} \left( \phi_0^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi_0 \right) + \\ & + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + V(\phi^\dagger, \phi) \end{aligned} \quad (5.44)$$

în care primii termeni ne vor da chiar masele bozonilor intermediari.

Astfel, din

$$\begin{aligned} & \frac{g^2 v^2}{8} (\vec{A}_\mu)^2 + \frac{g'^2 v^2}{8} (B_\mu)^2 + gg' B^\mu A_\mu^i \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 = \\ = & \frac{g^2 v^2}{8} ((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) + \frac{v^2}{8} (g A_\mu^3 - g' B_\mu)^2 = \\ = & \frac{g^2 v^2}{8} ((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) + \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.45)$$

vom obține, după diagonalizarea matricii prin efectuarea rotației

$$\tan \theta = \frac{g'}{g} \quad (5.46)$$

și redefinirea câmpurilor de etalonare:

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + i A_\mu^2) \\ Z_\mu &= A_\mu^3 \cos \theta - B_\mu \sin \theta \\ A_\mu &= A_\mu^3 \sin \theta + B_\mu \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.47)$$

următorii termeni de masă:

$$T = M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (5.48)$$



unde am introdus notațiile

$$M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad (5.49)$$

$$M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \quad (5.50)$$

În ceea ce privește potențialul scalar  $V(\phi^\dagger, \phi)$ , acesta poate fi scris

$$V = \lambda(\phi^\dagger \phi - \phi_0^\dagger \phi_0)^2 \quad (5.51)$$

sau, prin exprimare dubletului scalar complex sub forma următoarelor combinații de câmpuri reale

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

ca

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - v^2)^2 \quad (5.53)$$

Pentru punerea în evidență a bozonilor Goldstone și explicarea mecanismului Higgs, vom introduce câmpurile

$$\begin{aligned} w^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \\ w^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ z^0 &= \phi_4 \\ H &= \phi_3 - v \end{aligned} \quad (5.54)$$

și îl vom aduce pe (5.53) la forma

$$V = \frac{\lambda}{4} (2w^+ w^- + z^0 z^0 + H^2 + 2Hv)^2 \quad (5.55)$$

unde, așa cum era de așteptat, lagrangeianul ales având simetria globală ruptă spontan, în model au apărut particule fără masă și fără spin, notate cu  $w^\mp$ ,  $z^0$  și denumite bozoni Goldstone. Aceștia vor fi "înghițiți"



de cele trei câmpuri de etalonare, corespunzând simetriilor locale rupte, care capătă masele (5.49-50).

Invers, presupunând cunoscută masa bozonilor  $W_\mu^\pm$  și scoțându-l pe  $v^2$  din (5.49) ca fiind

$$v^2 = \frac{4M_W^2}{g^2} = (246 \text{ GeV})^2, \quad (5.56)$$

putem estima masa aproximativă a scalarului Higgs (considerând cuplajul goldstonilor la scalarul Higgs  $\lambda/4 \approx 1$ )

$$M_H = 2\sqrt{2}v \approx 700 \text{ GeV} \quad (5.57)$$

Descoperirea experimentală a scalarului Higgs ar oferi o mai bună înțelegere a mecanismului ruperii spontane de simetrie, constituind de asemenea, o strălucită confirmare a modelului Weinberg - Salam.

Revenind la expresia (5.44), observăm o serie de termeni mixti, de tipul  $A_\mu \partial^\mu \phi$  și  $B_\mu \partial^\mu \phi$ , ce trebuie eliminați datorită imposibilității existenței unui cuplaj între câmpurile de etalonare și scalarul  $\phi$  prin  $ik^\mu$ .

Pentru aceasta, vom modifica condiția de etalonare de tip Lorentz

$$f = \partial_\mu B^\mu = 0$$

la condițiile

$$f = \partial_\mu B^\mu + igt \frac{\xi}{2} (\phi^\dagger \phi_0 - \phi_0^\dagger \phi) \quad (5.58)$$

și respectiv

$$f_i = \partial_\mu A_i^\mu + ig\xi \left( \phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 - \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi \right) \quad (5.59)$$

și vom adăuga în lagrangeianul teoriei un termen de tipul

$$T_f = -\frac{1}{2\xi} f_i^2 - \frac{1}{2\xi} f^2 \quad (5.60)$$



de cele trei câmpuri de etalonare, corespunzând simetriilor locale rupte, care capătă masele (5.49-50).

Invers, presupunând cunoscută masa bozonilor  $W_\mu^\pm$  și scoțându-l pe  $v^2$  din (5.49) ca fiind

$$v^2 = \frac{4M_W^2}{g^2} = (246 \text{ GeV})^2, \quad (5.56)$$

putem estima masa aproximativă a scalarului Higgs (considerând cuplajul goldstonilor la scalarul Higgs  $\lambda/4 \approx 1$ )

$$M_H = 2\sqrt{2}v \approx 700 \text{ GeV} \quad (5.57)$$

Descoperirea experimentală a scalarului Higgs ar oferi o mai bună înțelegere a mecanismului ruperii spontane de simetrie, constituind de asemenea, o strălucită confirmare a modelului Weinberg - Salam.

Revenind la expresia (5.44), observăm o serie de termeni mixti, de tipul  $A_\mu \partial^\mu \phi$  și  $B_\mu \partial^\mu \phi$ , ce trebuie eliminați datorită imposibilității existenței unui cuplaj între câmpurile de etalonare și scalarul  $\phi$  prin  $ik^\mu$ .

Pentru aceasta, vom modifica condiția de etalonare de tip Lorentz

$$f = \partial_\mu B^\mu = 0$$

la condițiile

$$f = \partial_\mu B^\mu + ig' \frac{\xi}{2} (\phi^\dagger \phi_0 - \phi_0^\dagger \phi) \quad (5.58)$$

și respectiv

$$f_i = \partial_\mu A_i^\mu + ig\xi \left( \phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 - \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi \right) \quad (5.59)$$

și vom adăuga în lagrangeianul teoriei un termen de tipul

$$T_f = -\frac{1}{2\xi} f_i^2 - \frac{1}{2\xi} f^2 \quad (5.60)$$



O explicație mai amplă asupra necesității introducerii unui astfel de termen fiind în afara scopului acestei cărți, vom recomanda cititorului lucrările lui R.P. Feynman (1963) [37], B.S. DeWitt (1967) [38], L.D. Fadeev și V.N. Popov (1967) [39], în care este complet rezolvată problema cuantificării câmpurilor de etalonare, prin metoda integralei de drum.

În ceea ce ne privește, să analizăm ce alți termeni, pe lângă cei ce au rolul de a elimina produsele mixte, nefizice, de tipul  $A_\mu \partial^\mu \phi$ , mai apar în (5.60). Constantăm astfel următoarele combinații:

- termenii  $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu B_\mu)^2$  se adaugă lagrangeianului câmpurilor vectoriale masive. De exemplu, pentru un câmp vectorial masiv  $B_\mu$ , lagrangeianul va conține următorii termeni

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + \frac{1}{2}M^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu B_\mu)^2 \quad (5.61)$$

conducând la ecuația de câmp

$$\left( g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu + M^2 \right) B_\mu = -J^\nu \quad (5.62)$$

ce pune în evidență expresia renormabilă a propagatorului, într-un étalon  $\xi$  oarecare,

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right) \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \quad (5.63)$$

- Ceilalți termeni

$$\frac{g^2 \xi}{2} \left( \phi^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi_0 - \phi_0^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \phi \right)^2 + \frac{g'^2 \xi}{8} (\phi^\dagger \phi_0 - \phi_0^\dagger \phi)^2 \quad (5.64)$$



în care scriem dubletul scalar sub forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

cu  $\rho$  și  $\zeta$  dați de (5.52), formează combinațiile

$$\begin{aligned} & \frac{g^2 v^2 \xi}{16} \left[ \frac{1}{2} (\zeta^*)^2 - 2\rho^* \rho - \zeta^* \zeta + \frac{1}{2} \zeta^2 \right] + \\ & + \frac{g'^2 v^2 \xi}{16} \left[ \frac{1}{2} (\zeta^* - \zeta)^2 \right] = -\frac{g^2 v^2 \xi}{8} \rho^* \rho - \frac{(g^2 g'^2) v^2 \xi}{8} \phi_4^2 = \\ & = -\frac{1}{2} \xi M_W^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{2} \xi M_Z^2 \phi_4^2 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Adăugând și termenii cinetici corespunzători câmpurilor scalare, din (5.44), obține lagrangeianul particulelor fictive  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  și  $\phi_4$ , denumite *would - be Goldstone*, de forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{124} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_4 \partial^\mu \phi_4 - \\ & - \frac{1}{2} \xi M_W^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \xi M_W^2 \phi_2^2 - \frac{1}{2} \xi M_Z^2 \phi_4^2 \end{aligned} \quad (5.67)$$

conducând la propagatorii

$$\frac{i}{k^2 - \xi M_W^2 + i\varepsilon}$$

pentru  $\phi_1$  și  $\phi_2$  și la

$$\frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon}$$

pentru  $\phi_4$ . În ceea ce privește, câmpul scalar real notat cu  $\phi_3$ , acesta corespunde bozonului Higgs, de masă  $m\sqrt{2}$  și are propagatorul

$$\frac{i}{k^2 - 2m^2 + i\varepsilon}$$



### 5.2.3 Fermionii în modelul Weinberg - Salam

Să ne ocupăm, în cele ce urmează, de termenul  $\mathcal{L}_2$  din lagrangeianul modelului interacțiunilor electrolabe. Acesta descrie sectorul fermionic și este dat de relația (5.10) cu derivata covariantă de tipul (5.38). Utilizând reprezentarea matricile  $\gamma$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\end{aligned}\quad (5.68)$$

și despicând funcția de undă în partea *left-handed* și cea *right-handed*, adică

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_L + \psi_R \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi\end{aligned}\quad (5.69)$$

termenii de tipul  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , cuprinzând un sector leptonic și unul hadronic, (5.3), vor avea, la rândul lor, o parte *left-handed*, corespunzătoare dubleților

$$l_L^i = \begin{pmatrix} \nu_e^i \\ e^i \end{pmatrix}_L, \text{ cu } i = \overline{1,3} \quad (5.70)$$

cu hipersarcina  $Y = -1$  și respectiv

$$q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \text{ cu } i = \overline{1,3} \quad (5.71)$$

cu hipersarcina  $Y = \frac{1}{3}$  și o parte *right-handed*, pentru singleții  $e_R^i, u_R^i, d_R^i$ , cu hipersarcinile  $Y(e_R) = -2, Y(u_R) = \frac{4}{3}, Y(d_R) = -\frac{2}{3}$ .



Tinând cont de toate acestea și înlocuind pe  $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B_\mu$  din (5.47), vom separa, în (5.10), termenul de interacțiune de tipul  $\mathcal{L}_I = gJ_\mu A^\mu$  într-o parte *left-handed*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{IL} = & \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \sigma_+ \psi W_\mu^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \sigma_- \psi W_\mu^- - \\ & - \frac{1}{2} g \sin \theta_W \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi A_\mu + \\ & + \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\cos^2 \theta_W \sigma^3 - \frac{g'}{g} \sin \theta_W \cos \theta_W Y) \psi Z_\mu \end{aligned} \quad (5.72)$$

și una *right-handed*

$$\mathcal{L}_{IR} = -\frac{1}{4} g' \sin \theta_W \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) Y \psi Z_\mu + \frac{1}{4} g' \cos \theta_W \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) Y \psi A_\mu \quad (5.73)$$

unde am introdus notațiile

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_- &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Lagrangeianul total de interacțiune este suma termenilor anteriori, adică

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \sigma_+ \psi W_\mu^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \sigma_- \psi W_\mu^- + \\ & + \frac{g \sin \theta_W}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \left( \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y}{2} \right) \psi A_\mu + \\ & + \frac{g' \cos \theta_W}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) Y \psi A_\mu + \\ & + \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \left( \cos^2 \theta_W \sigma^3 - \frac{g'}{g} \sin \theta_W \cos \theta_W Y \right) \psi Z_\mu - \\ & - \frac{g' \sin \theta_W}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) Y \psi Z_\mu \end{aligned} \quad (5.75)$$



Particularizând expresia de mai sus pentru dubletul leptonic, vom obține următoarele tipuri de termeni:

- $g_W \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $-|e| \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e Z_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{e} \gamma^\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 + \gamma_5) e Z_\mu$

iar pentru sectorul cuarcilor

- $g_W \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $\frac{2}{3} |e| \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu - \frac{1}{3} |e| \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{u} \gamma^\mu \left( 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5 \right) u Z_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{d} \gamma^\mu \left( -1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W + \gamma_5 \right) d Z_\mu$

unde am notat cu  $|e|$  modulul sarcinii electronului.

### 5.3 Interacțiuni electrolabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă

Scopul acestui paragraf este formularea unei teorii  $SO(3, 1) \times SU(2) \times U(1)$  - gauge invariantă și obținerea sistemului de ecuații Dirac - Klein - Gordon - Maxwell - Yang - Mills, pe spațiu - timpul  $S^3 \times R$  [40,41].



Particularizând expresia de mai sus pentru dubletul leptonic, vom obține următoarele tipuri de termeni:

- $g_W \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $-|e| \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e Z_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{e} \gamma^\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 + \gamma_5) e Z_\mu$

iar pentru sectorul cuarcilor

- $g_W \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d W_\mu^+ + \text{h.c.}$
- $\frac{2}{3} |e| \bar{u} \gamma^\mu u A_\mu - \frac{1}{3} |e| \bar{d} \gamma^\mu d A_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{u} \gamma^\mu \left( 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5 \right) u Z_\mu$
- $\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{d} \gamma^\mu \left( -1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W + \gamma_5 \right) d Z_\mu$

unde am notat cu  $|e|$  modulul sarcinii electronului.

### 5.3 Interacțiuni electrolabe în formulare tetradică Lorentz - gauge invariantă

Scopul acestui paragraf este formularea unei teorii  $SO(3, 1) \times SU(2) \times U(1)$  - gauge invariantă și obținerea sistemului de ecuații Dirac - Klein - Gordon - Maxwell - Yang - Mills, pe spațiu - timpul  $S^3 \times R$  [40,41].



Pentru sistemul format din câmpuri bozonice și fermionice, vom porni de la densitatea totală de lagrangeian, invariantă față de grupul intern  $G \times U(1)$ , de forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi] + \mathcal{L}[\psi] + \mathcal{L}[A^\mu] + \mathcal{L}[A] + \mathcal{L}_i \quad (5.76)$$

unde

$$\mathcal{L}[\phi] = (D^a \phi)^\dagger D_a \phi + M^2 \phi^\dagger \phi \quad (5.77)$$

și

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^a D_a \psi - \overline{D_a \psi} \gamma^a \psi] + m \bar{\psi} \psi \quad (5.78)$$

descriu respectiv câmpul scalar masiv, de masă  $M$ , și câmpul Dirac de masă  $m$ , termenii

$$\mathcal{L}[A^\mu] = \frac{1}{4} F_{ab}^\mu F^{\mu ab} \quad (5.79)$$

și

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \quad (5.80)$$

corespund câmpurilor Yang - Mills și Maxwell, iar ultimul termen din (5.76) exprimă un cuplaj, de tip curent - curent, între scalari și fermioni.

Considerând acum  $G$  ca fiind un grup Lie simplu, a cărui generatori satisfac algebra

$$[T_\mu, T_\nu] = i f_{\mu\nu}^\sigma T_\sigma \quad (5.81)$$

scriem derivatele covariante sub forma

$$D_a \phi = \phi_{|a} - ig A_a^\mu T_\mu \phi - ie A_a \phi \quad (5.82)$$

$$(D_a \phi)^\dagger = \phi_{|a}^\dagger + ig \phi^\dagger T_\mu A_a^\mu + ie \phi^\dagger A_a \quad (5.83)$$

$$D_a \psi = \psi_{|a} + \Gamma_a \psi - ig A_a^\mu T_\mu \psi - ie A_a \psi \quad (5.84)$$



și conjugata sa hermitică, unde cuplajul minimal al câmpurilor materiale la spațiul - timp curb s-a realizat în acord cu invarianța  $SO(3, 1)$  și cu principiul echivalenței în formulare locală [42,43].

Tensorii Yang-Mills și electromagnetic, asociați grupului  $G$  și respectiv lui  $U(1)$ , sunt de forma

$$F_{ab}^{\mu} = A_{[b;a]}^{\mu} + gf_{\alpha\beta}^{\mu} A_a^{\alpha} A_b^{\beta} \quad (5.85)$$

$$F_{ab} = A_{[b;a]} \quad (5.86)$$

unde : este derivata covariantă Levi - Civita, iar  $[ ]$  exprimă antisimetrizarea (fără factorul  $1/2$ ).

Ecuatiile Euler - Lagrange asociate lui (5.76) sunt :

- pentru sectorul scalar

$$D_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_a \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (5.87)$$

și conjugata sa hermitică,

- pentru sectorul spinorial

$$D_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_a \psi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad (5.88)$$

și conjugata sa hermitică,

- pentru câmpurile de etalonare

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{;a}^{\mu}} \right]_{;a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\mu}} \quad (5.89)$$

și

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{;a}} \right]_{;a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \quad (5.90)$$



Acestea capătă forma tetradic  $SO(3, 1) \times G \times U(1)$  - gauge covariantă

$$D_a(D^a\phi) - M^2\phi = 2h(\bar{\psi}\gamma^a\psi)D_a\phi + h(\bar{\psi}\gamma^a\psi)_{;a}\phi \quad (5.91)$$

$$\gamma^a(D_a\psi) + m\psi = -h[\phi^\dagger(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger\phi]\gamma^a\psi \quad (5.92)$$

și conjugatele lor hermitice, și respectiv

$$D_b F_{\mu a}^b = \frac{i}{2}g\bar{\psi}\{\gamma_a, T_\mu\}\psi - ig[\phi^\dagger T_\mu(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger T_\mu\phi] + \quad (5.93)$$

$$+ igh(\phi^\dagger T_\mu\phi)(\bar{\psi}\gamma_a\psi)$$

$$F_{a;b}^b = ie\bar{\psi}\gamma_a\psi - ie[\phi^\dagger(D_a\phi) - (D_a\phi)^\dagger\phi] + ieh(\phi^\dagger\phi)(\bar{\psi}\gamma_a\psi) \quad (5.94)$$

## 5.4 Teorii gauge $SU(2) \times U(1)$ în Universul Einstein

Vom alege pentru sfera  $S^3$ , de rază unitate, aceeași parametrizare și vom lucra cu tetradul pseudo - ortonormal, (1.180, 184), satisfăcând relațiile de comutatori

$$[e_a, e_b] = D_{ab}^c e_c = 2\varepsilon_{4ab}^c e_c, \text{ cu } \varepsilon_{1234} = -1$$

și cu coeficienții esențiali ai conexiunii Levi - Civita

$$\Gamma_{abc} = \varepsilon_{abc4}$$

Teoria dezvoltată mai sus, în formulare Lorentz - gauge covariantă, are avantajul că poate fi materializată în cazul unor grupuri Lie de importanță fizică, cum ar fi:  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  sau  $SU(2) \times U(1)$ .



În cele ce urmează, vom exemplifica sistemul de ecuații Klein - Gordon - Dirac - Maxwell - Yang - Mills, la cazul grupului  $SU(2) \times U(1)$ , esențial pentru teoria interacțiunilor electrolabe, pentru care constantele de structură  $f_{\alpha\beta\sigma}$  sunt chiar

$$f_{\alpha\beta\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} \quad (5.95)$$

Tinând cont de aceasta și înlocuind pe

$$T_\mu = \frac{\sigma_\mu}{2} \quad (5.96)$$

în ecuațiile (5.91-94), cu derivatele covariante (5.82-84), vom obține :

- (i) pentru câmpul scalar, cuplat minimal la câmpurile de etalonare, pe varietatea  $S^3 \times R$

$$\begin{aligned} g^{ab} \phi_{|ba} &= [M^2 + e^2 A_a A^a + \frac{1}{4} g^2 A_a^\mu A_\mu^a] \phi = \\ &= 2 \left[ h(\bar{\psi} \gamma^a \psi) + ie A^a + ig A_\mu^a \frac{\sigma_\mu}{2} \right] \phi_{|a} + \left\{ h(\bar{\psi} \gamma^a \psi)_{|a} - \right. \\ &\quad \left. - 2h(\bar{\psi} \gamma^a \psi) \left[ ie A^a + ig A_\mu^a \frac{\sigma_\mu}{2} \right] + 2eg A^a A_\mu^a \frac{\sigma_\mu}{2} \right\} \phi \end{aligned} \quad (5.97)$$

- (ii) pentru câmpurile spinoriale

$$\begin{aligned} \gamma^a \psi_{|a} + m\psi + \frac{3}{2} \gamma_5 \beta \psi - ig \gamma^a A_\mu^a \frac{\sigma_\mu}{2} \psi - ie \gamma^a A_a \psi &= \\ = -h \left\{ [\phi^\dagger \phi_{|a} - \phi_{|a}^\dagger \phi] - 2ig \phi^\dagger A_\mu^a \frac{\sigma_\mu}{2} \phi - 2ie \phi^\dagger A_a \phi \right\} \gamma^a \psi \end{aligned} \quad (5.98)$$



(iii) ecuațiile Yang-Mills cu surse materiale, pentru grupul intern  $SU(2)$

$$\begin{aligned}
 g^{bc} A_{a|bc} - 2\varepsilon_{4abc} A^{b|c} - 4(A_a - \delta_a^4 A_4) = \\
 = -ie\bar{\psi}\gamma_a\psi - ieh\phi^\dagger\phi(\bar{\psi}\gamma_a\psi) + \\
 + ie\left[(\phi^\dagger\phi_{|a} - \phi_{|a}^\dagger\phi) - 2\phi^\dagger\left(igA_\mu^a\frac{\sigma_\mu}{2} + ieA_a\right)\phi\right]
 \end{aligned}
 \tag{5.99}$$

(iv) ecuațiile de tip Maxwell, cu surse materiale, pe varietatea spațio-temporală  $S^3 \times R$

$$\begin{aligned}
 -A_{\mu\alpha|b}^{|b} + 2\varepsilon_{4abc} A_\mu^{b|c} + 4(A_{\mu a} - \delta_a^4 A_4) + 2gf_{\mu\alpha\beta} A_{a|b}^\alpha A^{\beta b} + \\
 + gf_{\mu\alpha\beta} A_b^\alpha A_{|a}^{\beta b} + 3gf_{\mu\alpha\beta} A^{\alpha b} A^{\beta c} \varepsilon_{abc4} - \\
 - g^2 \left[ A_{\mu a} (A_b^\alpha A_\alpha^b) - A_\mu^b A_b^\rho A_{\rho a} \right] = \\
 = \frac{i}{2} g \bar{\psi} \left\{ \gamma_a, \frac{\sigma_\mu}{2} \right\} \psi - ig \left( \phi^\dagger \frac{\sigma_\mu}{2} \phi_{|a} - \phi_{|a}^\dagger \frac{\sigma_\mu}{2} \phi \right) - \\
 - 2eg\phi^\dagger \frac{\sigma_\mu}{2} \phi A_a - \frac{1}{2} g^2 \phi^\dagger \phi A_{\mu a} + igh \left( \phi^\dagger \frac{\sigma_\mu}{2} \phi \right) (\bar{\psi}\gamma_a\psi)
 \end{aligned}
 \tag{5.100}$$

Prin comparație cu sistemul de ecuații prezentat în paragraful precedent, dedicat modelului Weinberg - Salam, acesta îl generalizează, conținând un număr mare de termeni suplimentari, datorati cuplajului minimal al câmpurilor materiale la spațiu - timpul  $S^3 \times R$ .



# Bibliografie

- [1] Weyl, H., 1950, *Phys. Rev.* **77**, 699.
- [2] Yang, C.N., and Mills, R.L., 1954, *Phys. Rev.* **96**, 191.
- [3] Lee, T.D., and Yang, C.N., 1957, *Brookhaven National Lab., Associated Univ. Inc.*
- [4] Salam, A., 1957, *Il Nuovo Cimento* **5**, 299.
- [5] 't Hooft, G., 1971, *Nucl. Phys.* **B35**, 167.
- [6] Weinberg, S., 1967, *Phys. Rev. Lett* **19**, 1264.
- [7] Salam, A., 1969, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almquist and Wiksells.
- [8] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H., 1973, *Phys. Lett* **B47**, 365.
- [9] Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., 1964, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138.
- [10] Paschos, E.A., and Turke, U., 1989, *Phys. Rep.* **178**, 146.
- [11] Dărieșcu, C., and Dărieșcu, M.A., 1996, *Phys. Lett.* **B378**, 323.



- [12] Georgi, H., and Glashow, S.L., 1974, *Phys. Rev. Lett* **32**, 438.
- [13] Pati, J.C., and Salam, A., 1973, *phys. Rev.* **D8**, 1240.
- [14] Ross, G.G., 1984, *Grand Unified Theories*, Reading: Benjamin/Cummings.
- [15] Mohapatra, R.N., 1986, *Unification and Supersymmetry*, New York: Springer-Verlag.
- [16] Freund, G.O., 1986, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [17] Sen, D., 1987, *Nucl. Phys.* **B284**, 201.
- [18] Nieuwenhuizen, P., 1981, *phys. Rep.* **4**.
- [19] Dariescu, C., Dariescu, M.A., et. al., 1992, *Gravitația. Pledoarie pentru o nouă teorie a spațiului și timpului*, ed. M. Agop, Iași: Graphix.
- [20] West, P., 1988, CERN-TH Preprint 5165.
- [21] Antoniadis, I., Ellis, J., Kelley, S., and Nanopoulos, D., 1991, CERN-TH Preprint 6169.
- [22] Cho, Y.M., 1975, Univ. Chicago Preprint EFI 75/2.
- [23] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.
- [24] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.
- [25] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1992, *TENSOR N.S.* **53**, 162.



- [26] Ashtekar, A., 1986, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, ed. F.L. Zhi and R. Ruffini, Singapore: World Scientific.
- [27] Dariescu, C., Hamamoto, S., and Dariescu, M.A., 1996, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 1199.
- [28] Sen, D., 1990, *Phys. Rev.* **D41**, 667.
- [29] Aitchison, I.J.R., and Hey, A.J.G., 1982, *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol: Adam Hilger.
- [30] Bailin, D., and Love, A., 1986, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger.
- [31] Chaichian, M., and Nelipa, N.F., 1984, *Introduction to Gauge Field Theories*, Berlin: Springer-Verlag.
- [32] Cheng, T.P., and Li, L.F., 1984, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford: Clarendon Press.
- [33] Kaku, M., 1993, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford: Oxford Univ. Press.
- [34] Novacu, V., 1984, *Teoria Cuantică a Câmpurilor*, București: Ed. Tehnică.
- [35] Ramond, P., 1981, *Field Theory. A Modern Primer*, Reading: Benjamin/Cummings.
- [36] Taylor, J.C., 1978, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [37] Feynman, R.P., 1963, *Acta Phys. Polon.* **XXIV**, 697.



- [38] DeWitt, B.S., 1967, *Phys. Rev.* **162**, 1239.
- [39] Fadeev, L.D., and Popov, V.N., 1967, *Phys. Lett.* **25B**, 29.
- [40] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1577
- [41] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, *Found. Phys.* **25**, 1523.
- [42] Canuto, v., 1982, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 633.
- [43] Soleng, H.H., 1991, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1089.



# Bibliografie

- [1] Aitchison, I.J.R., and Hey, A.J.G., 1982, *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol: Adam Hilger.
- [2] Antoniadis, I., Ellis, J., Kelley, S., and Nanopoulos, D., 1991, CERN-TH Preprint 6169.
- [3] Ashtekar, A., 1986, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, ed. F.L. Zhi and R. Ruffini, Singapore: World Scientific.
- [4] Bailin, D., and Love, A., 1986, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger.
- [5] Birrell, N.D., and Davies, P.C.W., 1982, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [6] Canuto, v., 1982, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 633.
- [7] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 175.
- [8] Carmeli, M., 1985, *Found. Phys.* **15**, 185.
- [9] Carmeli, M., and Malin, S., 1985, *Found. Phys.* **15**, 1019.
- [10] Carmeli, M., and Malin, S., 1986, *Found. Phys.* **16**, 791.
- [11] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 193.
- [12] Carmeli, M., and Malin, S., 1987, *Found. Phys.* **17**, 407.
- [13] Chaichian, M., and Nelipa, N.F., 1984, *Introduction to Gauge Field Theories*, Berlin: Springer-Verlag.



- [14] Cheng, T.P., and Li, L.F., 1984, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford: Clarendon Press.
- [15] Cho, Y.M., 1975, Univ. Chicago Preprint EFI 75/2.
- [16] Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., 1964, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138.
- [17] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1991, *Found. Phys.* **21**, 1323.
- [18] Dariescu, C., Dariescu, M.A., et. al., 1992, *Gravitația. Pledoarie pentru o nouă teorie a spațiului și timpului*, ed. M. Agop, Iași: Graphix.
- [19] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1577
- [20] Dariescu, C., Dariescu, M.A., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.100**, Florence.
- [21] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1995, *Rom. Astron. J.* **5**, 55.
- [22] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, in *Lagrange and Finsler Geometry*, ed. P.L. Antonelli and R. Miron, Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.
- [23] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1996, *Phys. Lett.* **B378**, 323.
- [24] Dariescu, C., Hamamoto, S., and Dariescu, M.A., 1996, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 1199.
- [25] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. Astron. J.* **7**, (sub *tipar*).
- [26] Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1997, *Rom. J. Phys.* **42**, (sub *tipar*).
- [27] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1993, *TENSOR N.S.* **53**, 162.



- [28] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, International Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebra, Thessaloniki, (*sub tipar*).
- [29] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1994, *Found. Phys.* **24**, 1523.
- [30] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Found. Phys.* **25**, 957.
- [31] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I., 1995, *Proc. GR14 Int. Conf. on General Relativity and Gravitation*, **A.99**, Florence.
- [32] Dariescu, M.A., and Dariescu, C., 1995, *Astron. Phys. J.* **5**, 61.
- [33] DeWitt, B.S., 1963, in *Dynamical Theory of Groups and Fields*, 1963 Les Houches Summer School.
- [34] DeWitt, B.S., 1967, *Phys. Rev.* **162**, 1239.
- [35] Fadeev, L.D., and Popov, V.N., 1967, *Phys. Lett.* **25B**, 29.
- [36] Feynman, R.P., 1963, *Acta Phys. Polon.* **XXIV**, 697.
- [37] Freund, G.O., 1986, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [38] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H., 1973, *Phys. Lett* **B47**, 365.
- [39] Fulling, S.A., 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [40] Georgi, H., and Glashow, S.L., 1974, *Phys. Rev. Lett* **32**, 438.
- [41] Gheorghiev, G., și Oproiu, V., 1977, *Geometrie Diferențială*, București: Ed. Didactică și Pedagogică.
- [42] 't Hooft, G., 1971, *Nucl. Phys.* **B35**, 167.



- [43] Ianuș, S., 1983, *Geometrie Diferențială cu Aplicații în Teoria Relativității*, București: Ed. Acad. R.S.R.
- [44] Kaku, M., 1993, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford: Oxford Univ. Press.
- [45] Kobayashi, S., and , Nomizu, K., 1963, *Foundations of Differential Geometry*, New York: Interscience Publ.
- [46] Kramers, H.A., 1937, *Proc. Amsterdam Acad.* **40**, 814.
- [47] Lee, T.D., and Yang, C.N., 1957, *Brookhaven National Lab.*, Associated Univ. Inc.
- [48] Miron, R., și Anastasiei, M., 1987, *Fibrat Vectoriale. Spații Lagrange. Aplicații în Teoria Relativității*, București: Ed. Acad. R.S.R.
- [49] Mohapatra, R.N., 1986, *Unification and Supersymmetry*, New York: Springer-Verlag.
- [50] Nieuwenhuizen, P., 1981, *Phys. Rep.* **4**.
- [51] Novacu, V., 1984, *Teoria Cuantică a Câmpurilor*, București: Ed. Tehnică.
- [52] Paschos, E.A., and Turke, U., 1989, *Phys. Rep.* **178**, 146.
- [53] Pati, J.C., and Salam, A., 1973, *phys. Rev.* **D8**, 1240.
- [54] Ramond, P., 1981, *Field Theory. A Modern Primer*, Reading: Benjamin/Cummings.
- [55] Rîjic, I.M., and Gradstein, I.S., 1955, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*, București: Ed. Tehnică.
- [56] Ross, G.G., 1984, *Grand Unified Theories*, Reading: Benjamin/Cummings.



- [57] Salam, A., 1957, *Il Nuovo Cimento* **5**, 299.
- [58] Salam, A., 1969, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almqvist and Wiksells.
- [59] Sen, D., 1986, *J. Math. Phys.* **27**, 472.
- [60] Sen, D., 1987, *Nucl. Phys.* **B284**, 201.
- [61] Sen, D., 1990, *Phys. Rev.* **D41**, 667.
- [62] Soleng, H.H., 1991, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1089.
- [63] Straumann, N., 1984, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Berlin: Springer-Verlag.
- [64] Taylor, J.C., 1978, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [65] Weinberg, S., 1967, *Phys. Rev. Lett* **19**, 1264.
- [66] West, P., 1988, CERN-TH Preprint 5165.
- [67] Weyl, H., 1950, *Phys. Rev.* **77**, 699.
- [68] Yang, C.N., and Mills, R.L., 1954, *Phys. Rev.* **96**, 191.
- [69] Zet, G., 1990, *Found. Phys.* **20**, 111.
- [70] Zet, G., Pasnicu, C., and Agop, M., 1991, *Found. Phys.* **21**, 473.
- [71] Zet, G., Dariescu, C., and Dariescu, M.A., 1993, *TENSOR N.S.* **52**, 14.